

Physik Anfängerpraktikum - Versuch 102 - Drehschwingungen

Sebastian Rollke (103095) und Daniel Brenner (105292)

21. September 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Zielsetzung	2
2	Theorie	2
2.1	Bestimmung des Torsionsmodul durch Drehschwingungen	2
2.2	Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch die Schallgeschwindigkeit in Festkörpern	4
2.3	Das Magnetische Moment	5
3	Durchführung	6
3.1	Torsionsmodul	6
3.2	Elastizitätsmodul	6
3.3	Magnetisches Moment	7
3.4	Digitale Schaltung zur Zeitmessung	8
4	Auswertung	10
4.1	Experimentelle Bestimmung des Schubmoduls G eines Stahldrahtes	11
4.2	Bestimmung des Elastizitätsmoduls E eines Stahlstabes	12
4.3	Berechnung der Querkontraktionszahl μ und des Kompressionsmoduls Q von Stahl	14
4.4	Experimentelle Bestimmung des Dipolmoments \vec{m} eines Permanentmagneten . .	16
4.5	Fehlerdiskussion	17

1 Einleitung und Zielsetzung

Kräfte, die auf Oberflächen von Festkörpern einwirken, können dabei Gestalts- und Volumenänderungen hervorrufen. Die Proportionalitätsfaktoren zwischen den pro Flächeneinheit angreifenden Kräften und den relativen Deformationen und Voluminaänderungen bezeichnet man als elastische Konstante. Einige dieser Materialkonstanten von Stahl, die eine wichtige Rolle in der Werkstofftechnik spielen, sowie das magnetische Moment eines Paramagneten sollen in diesem Versuch bestimmt werden.

2 Theorie

Die Kräfte, die nur die Oberfläche des Festkörpers beeinflussen, bezeichnet man als Spannung oder auch Druck. Diese beziehen sich auf die Flächeneinheit und lassen sich in einen Tangentialanteil τ (Schubspannung) und einen orthogonalen Anteil σ (Normalspannung) zerlegen. Die sogenannten Oberflächenkräfte lassen sich nicht nur an der Oberfläche, sondern an jeder beliebigen Querschnittsfläche des Körpers messen.

Man spricht von einer elastischen Deformation, wenn diese reversibel ist, der Körper nach dem Einwirken der Kraft also wieder seine ursprüngliche Form einnimmt. Für kleine Spannungen und somit kleine relative Flächen- bzw. Volumenänderungen gilt das Hookesche Gesetz:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad \text{oder} \quad P = Q \frac{\Delta V}{V} \quad (1)$$

Die zu untersuchenden Körper sind isotrop, das heißt die elastischen Konstanten sind nicht Richtungsabhängig. Ihr Verhalten wird durch 2 Konstanten vollständig beschrieben. Man verwendet jedoch aus praktischen Gründen 4 Konstanten: der Torsionsmodul G für die Gestaltelastizität, der Kompressionsmodul Q für die Volumenelastizität, der Elastizitätsmodul E für die relative Längenänderung in Normalspannungsrichtung und die Poissonsche Querkontraktionszahl μ für die relative Längenänderung senkrecht zur Normalspannung.

$$\mu := -\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L} \quad (2)$$

Die 4 Konstanten sind allerdings nicht unabhängig voneinander. In der Elastizitätstheorie kann man zeigen, daß gilt:

$$E = 2G(\mu + 1) \quad (3)$$

$$E = 3Q(1 - 2\mu) \quad (4)$$

2.1 Bestimmung des Torsionsmodul durch Drehschwinungen

In unserem Versuch wird der Torsionsmodul aus der Torsion eines zylinderförmigen Drahtes bestimmt. Der Torsionsmodul lässt sich beobachten, wenn auf einen Körper Tangentialspannungen wirken. Die entstehende Deformation ist die sogenannte Scherung. Zwischen Schubspannung τ , Scherungswinkel α und dem Torsionsmodul G besteht der Zusammenhang:

$$\tau = G\alpha \quad (\text{Hookesches Gesetz}) \quad (5)$$

Man spannt dazu den Draht an einem Ende fest ein und lässt am anderen Ende an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten ein Kräftepaar angreifen (vgl. Abbildung 1). So wirkt dann ein Drehmoment M auf den Draht, das eine Verdrehung der unteren Stirnfläche gegen die obere um

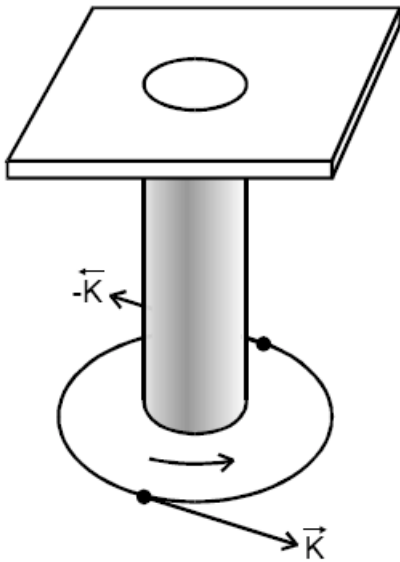


Abbildung 1: Torsion eines zylindrischen Stabes

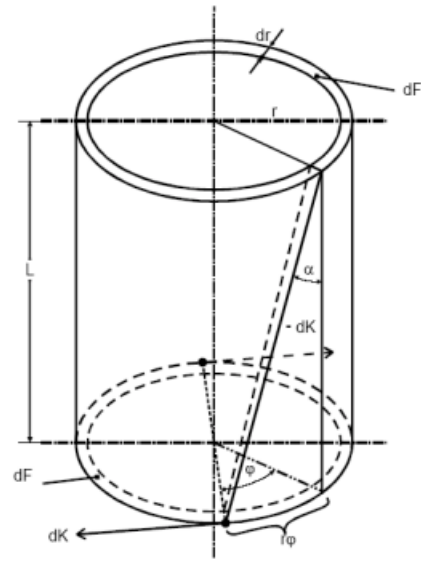


Abbildung 2: Zusammenhang zwischen Drehmoment M und Torsionswinkel φ

den Winkel φ hervorruft (vgl. Abbildung 2). Für das Drehmoment, das am Kreisring mit dem Radius r angreift, gilt $dM = r dK$. Die Schubspannung τ ist definiert als $\frac{dK}{dF}$ (Tangentialkraft pro Flächeneinheit) woraus direkt für dM folgt:

$$dM = r \tau dF$$

Aus Abbildung 1 kann man ablesen, daß $\alpha = r\varphi/L$ ist. Dadurch bekommt man schließlich für den Zusammenhang zwischen dem angreifenden Drehmoment M und dem Torsionswinkel φ durch die Integration über den Radius

$$M = \int_0^R 2\pi \frac{G}{L} \varphi r^3 dr = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \varphi = D \varphi \quad (6)$$

wobei die Richtgröße des Zylinders gegeben ist als (mit dem Radius R und der Länge L des Drahtes):

$$D := \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} . \quad (7)$$

Wie man erkennt spiegelt sich in Gleichung (6) das Hooksche Gesetz wieder. Mit diesem Aufbau ließe sich im Prinzip direkt der Wert G bestimmen, denn alle Größen aus (6) sind leicht messbar. In der Praxis tritt jedoch das Phänomen der sog. elastischen Nachwirkung auf. Diese verhindert, daß sich (insbesondere bei Metallen mit niedrigem Schmelzpunkt) die Deformation eines Körpers direkt auf einen endgültigen Wert einstellt bzw. daß sie nach dem Ausbleiben der angreifenden Spannung nicht sofort auf den Wert 0 zurückgeht. Um dieses zu umgehen verwendet man eine sogenannte dynamische Methode, bei der die angreifende Spannung eine Funktion der Zeit t ist. Hierzu wird das Torsionssystem, durch Anhängen einer Kugel mit

dem Trägheitsmoment θ an den Draht, zu einem schwingfähigen System erweitert. An den Draht greifen nun zwei entgegengesetzt wirkende Drehmomente an, zum einen das durch die Torsion (durch (6) gegebene) und zum anderen eines bedingt durch die Trägheit der Masse.

$$M_T = \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

Die Bewegungsgleichung des Systems ist somit die eines harmonischen Oszillators

$$D\varphi + \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$$

Die Differentialgleichung wird gelöst durch den Ansatz

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t$$

mit

$$T = 2\pi \sqrt{\theta/D} \quad (8)$$

Zur Bestimmung benötigt man noch das Trägheitsmoment der Kugel, das gegeben ist durch

$$\theta_{Kugel} \cdot \rho \int_0^{R_K} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r_K^4 dr_K \cos^3 \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{2}{5} m_k R_k^2. \quad (9)$$

Durch Kombination von (7), (8) und (9) erhält man schließlich für den Schubmodul G:

$$G = \frac{16}{5} \pi \frac{m_k R_k^2 L}{T^2 R^4}. \quad (10)$$

2.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch die Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

Wird ein Schallimpuls durch einen Stoß auf die Stirnseite eines langen dünnen Stabes erzeugt, durchläuft diesen eine longitudinale Deformation. Es kommt also ortsabhängig zu unterschiedlichen Spannungen. Die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes wird nun vorausgesetzt, womit gilt

$$\begin{aligned} \sigma &= E \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \text{und} \\ \sigma + d\sigma &= E \frac{\partial \xi}{\partial x} + E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

mit der Länge des Volumenelementes ∂x und der spannungsbedingten Längenänderung $\partial \xi$. Das Volumenelement $dV = Q dx$ erfährt die Kraft

$$dF = Q((\sigma + d\sigma) - \sigma) = QE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

Mit der Masse des Stabes, die allgemein definiert ist als $dm = \rho dV$ (Dichte ρ und Volumenelement dV) folgt die Beschleunigung

$$b = \frac{dF}{dm} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Eine solche Gleichung bezeichnet man als Wellengleichung, deren Lösung nach d'Allembert gegeben ist durch

$$\xi(x, t) = f(x \pm ct) . \quad (11)$$

Die Konstante c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit in dem Körper) der Welle. Dieser Zusammenhang ergibt sich dadurch das die Wellengleichung zu jeder Zeit und an jedem Ort die gleiche Lösung haben muß. Setzt man (11) in die Wellengleichung ein, bekommt man für diese

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow E = c^2 \cdot \rho . \quad (12)$$

Es ist also nun möglich durch messen der Dichte ρ und der Schallgeschwindigkeit c den Elastizitätsmodul zu bestimmen.

2.3 Das Magnetische Moment

Zusätzlich zu den elastischen Konstanten soll das Magnetische Moment \vec{m} eines Permanentmagneten mittels Drehschwingungen mit durch ein Magnetfeld verminderter Schwingungsdauer ermittelt werden.

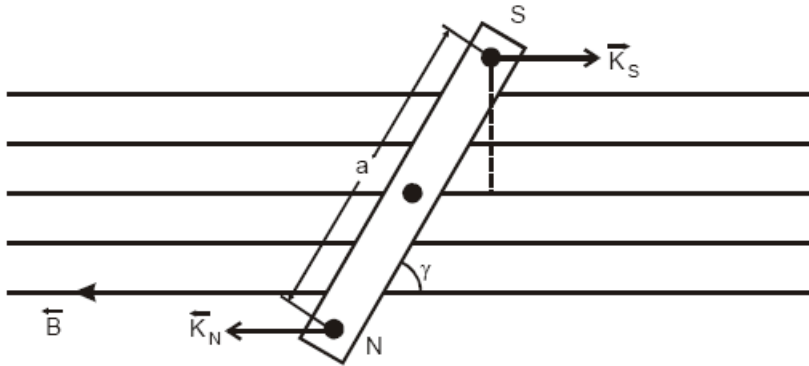


Abbildung 3: Angreifende Kräfte an einem Permanentmagneten in einem homogenen Magnetfeld

Allgemein ist dieses durch die Polstärke p und den Abstand der beiden Pole \vec{a} definiert.

$$\vec{m} = p\vec{a} \quad (13)$$

In einem homogenen Magnetfeld mit der Flussdichte \vec{B} wirken auf den Magneten zwei Kräfte (vgl. Abbildung 3). Da diese entgegengesetzt gleich sind, wirkt keine resultierende Kraft sondern ein Drehmoment \vec{M}_{Mag} mit

$$\vec{M}_{Mag} = p\vec{a} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (14)$$

und dem Betrag

$$M_{Mag} = mB \sin \gamma \quad (15)$$

wobei γ der Winkel zwischen dem äußeren Magnetfeld und dem Stabmagneten ist. Justiert man nun die Dipolachse des Magneten so, dass sie in Ruhestellung parallel zur Feldrichtung steht, ist $\gamma = \varphi$ und man bekommt für die Bewegungsgleichung:

$$mB \sin \varphi + D\varphi + \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 \quad (16)$$

Vereinfacht man diese Differentialgleichung nun indem man nur kleine Auslenkungen ($\sin \gamma \approx \gamma$) zulässt, so wird aus (16)

$$(mB + D)\varphi + \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 \quad (17)$$

Die Lösung ist analog zu (8) gegeben durch:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T_m} t \quad (18)$$

mit

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{mB + D}}. \quad (19)$$

3 Durchführung

3.1 Torsionsmodul

Die Messapparatur besteht wie in Abbildung 4 dargestellt aus einem Torsionsdraht an dessen Ende eine Kugel aufgehängt wurde, die durch kurzes Auslenken des Justierades zu einer harmonischen Schwingung angeregt wird. Zur Bestimmung der Periodendauer ist an dem Torsionsdraht ein Spiegel angebracht, der einen einfallenden Lichtstrahl reflektiert. Der Lichtstrahl wird nun mehrfach pro Periode von einer Photodiode registriert. Die angeschlossene elektronische Schaltung, auf die später noch eingegangen wird, realisiert dabei, dass die elektronische Uhr genau eine Periodendauer misst. Die Kugel, die hier genutzt wird, beinhaltet bereits den später benötigten Permanentmagneten. Um den Einfluss des Erdmagnetfeldes auf den Magneten auszuschalten wird seine Dipolachse parallel zum Erdmagnetfeld ausgerichtet.

Aus Abbildung 5 kann man entnehmen wie die Messung der Periodendauer realisiert ist. Das Licht der Lampe wird durch einen Spalt und eine Sammellinse zu einem scharfberandeten Lichtbündel gewandelt und trifft so auf den Spiegel am Torsionsdraht. Dieser ändert seinen Winkel permanent durch die Schwingung des Drahtes und reflektiert den Lichtstrahl und löst entsprechend die Stoppuhr aus bzw. stoppt diese wieder (vgl. Kapitel 3.4).

3.2 Elastizitätsmodul

Zur Messung der Schallgeschwindigkeit wird die in Abbildung 6 dargestellte Apparatur verwendet. Hierbei wird ein Pendel mit einer Metallkugel verwendet, welches durch einen Elektromagneten gehalten und beim Start der Messung ausgelöst wird. In der Apparatur liegt ein Probestab, der mit einem Tonabnehmer verbunden ist, wodurch seine Schwingungen registriert werden können.

Trifft die Metallkugel auf die Stirnseite des Probestabes, wird ein Schallimpuls erzeugt. Diese elastische Deformation durchläuft den Stab und trifft auf der entgegengesetzten Seite auf die zweite Stirnfläche. Dort wird sie durch einen Tonabnehmer registriert und ein elektrischer

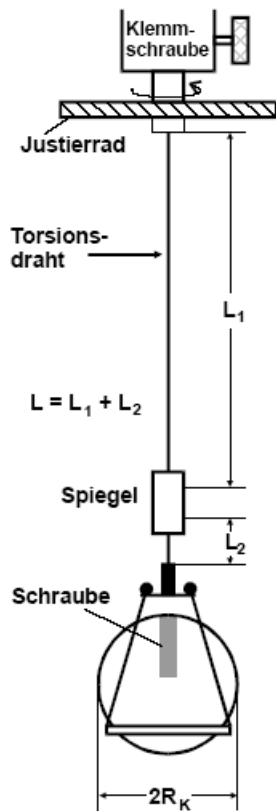


Abbildung 4: Skizze der Messapparatur (ohne Zeitmessvorrichtung)

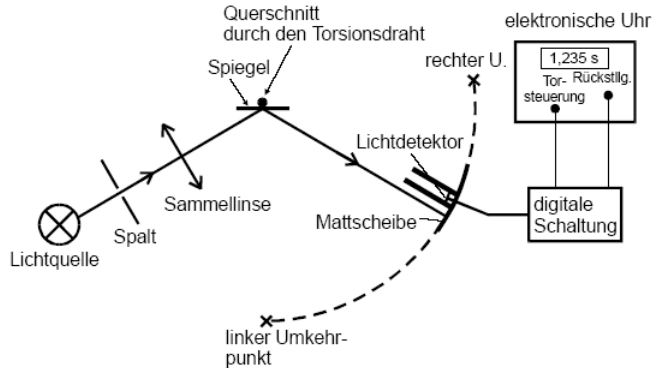


Abbildung 5: Schematische Darstellung der Periodenmessung

Impuls erzeugt, welcher einen Verstärker und eine Torstufe durchläuft. Sobald der Impuls die Torstufe erreicht öffnet sie sich, so dass ein quartzgesteuerter Zeitbasisgenerator Impulse in $1 \mu\text{sec}$ Abständen an das elektronische Zählwerk senden kann.

Da die Schallgeschwindigkeit in Materie deutlich größer ist als in Luft, wird der Schallimpuls zum größten Teil reflektiert und durchläuft den Probekörper wieder zum Anfang, wird wieder reflektiert und wird ein zweites mal vom Tonabnehmer registriert. Dieser sendet wieder ein Signal zur Torstufe, welche daraufhin sperrt. Somit wird im Zählwerk die Zeit gemessen, die der Schall benötigt, um die doppelte Stablänge zu durchlaufen. Mittels eines Schalters kann die Uhr so eingestellt werden, daß sie erst nach 10 registrierten Schallimpulsen stoppt und somit die Laufzeit für die zwanzigfache Stablänge anzeigt. Schließlich wird nun noch die Dichte des Stabes bestimmt. Dafür wird mittels einer Schieblehre die Länge des Stabes bestimmt, sein Durchmesser mit einer Mikrometerschraube gemessen, sowie mit einer Präzisionswaage die Masse bestimmt.

3.3 Magnetisches Moment

Für die Bestimmung des magnetischen Momentes regen wir die Apparatur wieder zu Dreh-schwingungen an und beobachten wie die Periodendauer durch das anlegen eines homogenen Magnetfeldes beeinflusst wird.

Dieses wird erzeugt durch ein Helmholtzspulenparr mit bekanntem Radius und Windungszahl.

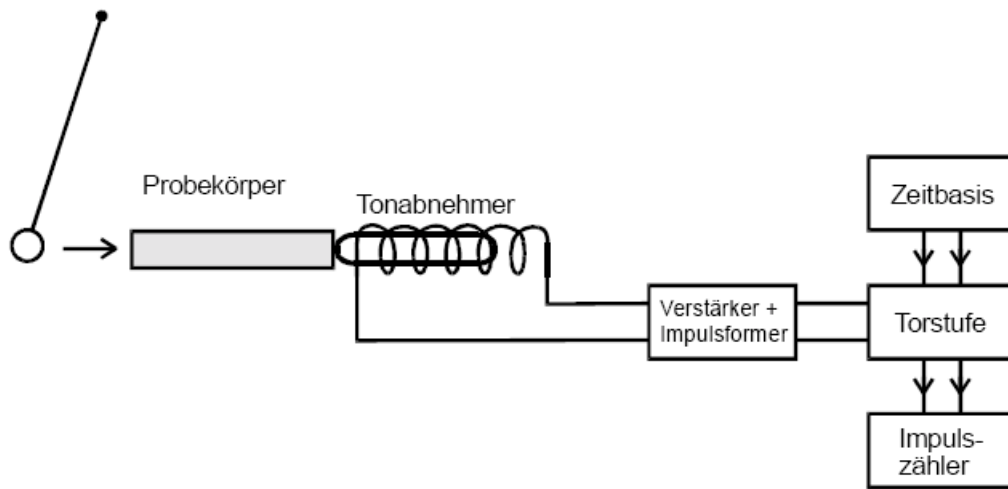


Abbildung 6: Schematische Darstellung einer Apparatur zur Messung der Laufzeit eines Schallimpulses in einem stabförmigen Probekörper

Magnetfeldstärke (bestimmt durch den Strom in der Spule) und Schwingungsdauer hängen dabei über die oben gezeigten Bedingungen voneinander ab.

3.4 Digitale Schaltung zur Zeitmessung

Um an der Stoppuhr die exakte Periodendauer festzustellen, benötigte man die bereits angesprochene digitale Schaltung (vgl. Abbildung 7). Die Flip-Flops sowie die Uhr sind hierbei High(H)

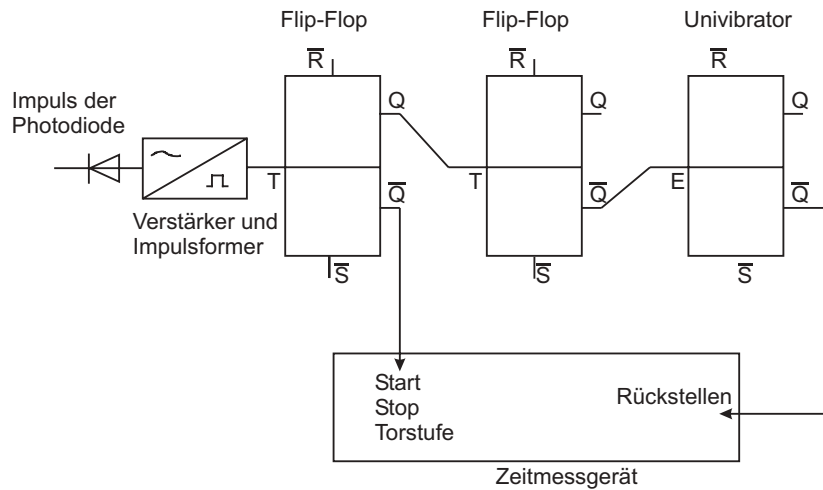


Abbildung 7: Schematische Darstellung der digitalen Schaltung zur Schwingungsdauermessung

→ Low(L) getriggert. Sie reagieren somit nur auf genau diesen Abfall der Signalflanke. Wir iden-

Impuls	Q_1	$\overline{Q_1}$	Q_2	$\overline{Q_2}$	$\overline{Q_{3,0}}$	$\overline{Q_{3,t}}$	Aktion
0	L	H	L	H	H	H	Grundzustand
1	H	L	L	H	H	H	Start
2	L	H	H	L	H	H	-
3	H	L	H	L	H	H	Stop
4	L	H	L	H	H	L	Reset

Tabelle 1: Spannungspegel an den Ausgängen

tifizieren im folgenden Q_i als Ausgang Q des i-ten Flip-Flops .

Zusätzlich identifizieren wir $\overline{Q_{3,0}}$ als Zustand des Ausganges $\overline{Q_3}$ während t und $\overline{Q_{3,t}}$ als Zustand dieses Ausgangs nach dem Zeitraum t. Der Univibrator reagiert auf eine Low(L) \rightarrow High(H) Flanke.

Jedesmal wenn ein Lichtstrahl auf die Photodiode fällt, wird durch einen Verstärker und einen Impulsformer ein Rechteckpuls generiert.

Nach dem ersten Impuls kommt es somit zu Änderungen an des Ausgängen des ersten Flip-Flops. Der Wechsel $H \rightarrow L$ an $\overline{Q_1}$ führt zum Start der Uhr. Der Wechsel an Q bleibt ohne Auswirkung, da er von L nach H geschieht.

Der zweite Impuls ändert wieder die Zustände der beiden Ausgänge des ersten Flip-Flops. Doch jetzt kommt es zu einer Änderung der Ausgänge am zweiten Flip-Flop. Der Univibrator bleibt zunächst unbetrachtet, da er nur "aktiv" wird, wenn es eine ansteigende Flanke ($L \rightarrow H$) am Eingang E gibt.

Der dritte Impuls stoppt nun die Uhr.

Der vierte Impuls versetzt das ganze System in den Ursprungszustand zurück und löst nach einem Zeitraum t (der durch eine an den Univibrator angeschlossene RC-Kombination definiert ist nach $t = \ln(2)RC$) durch den $H \rightarrow L$ Wechsel an $\overline{Q_3}$ den Rückstellimpuls aus, der die Uhr zurücksetzt.

Danach ist die Apparatur bereit für die Messung der nächsten Schwingung.

4 Auswertung

Im allgemeinen benutzen wir die folgenden Gleichungen zur Fehlerbestimmung. Wir identifizieren die relativen Fehler der Messgröße x mit r_x und die absoluten Fehler der Messgröße als s_x . Dabei gilt

$$r_x := \frac{s_x}{x} .$$

Der Mittelwert einer Messreihe ergibt sich nach:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

Für die Standardabweichung σ_x gilt:

$$\sigma_x := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Damit folgt der Fehler des Mittelwerts zu:

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Bei der Angabe von Messwerten bzw. Fehlern in Tabellen verwenden wir dabei auch die Abkürzung "Mw." für den Mittelwert.

Fehlerangaben in Tabellen beziehen sich immer auf den Mittelwert, der relative Fehler ist dabei als relativer Fehler des Mittelwerts (in Prozent) angegeben.

4.1 Experimentelle Bestimmung des Schubmoduls G eines Stahldrahtes

Man bestimmt die Abmessungen des verwendeten Drahtes (vgl. Tabelle 2). Weiterhin bekannt waren die in Tabelle 3 angegebenen Werte. l_1 wurde hierbei vom Aufhängepunkt des Drahtes bis zum Spiegel und l_2 ab dem Spiegel bis zur Kugelaufhängung gemessen, d_D bezeichnet den Durchmesser des Drahtes.

Die Gesamtlänge l_D ergibt sich damit zu

$$l_D = (61,11 \pm 0,04) \text{ cm} .$$

Der Fehler ergibt sich aus

$$s_{l_D}^2 = \sqrt{s_{l_1}^2 + s_{l_2}^2} .$$

In Tabelle 4 sind die bei der Torsion des Drahtes gemessenen Schwingungsdauern angegeben. Mit den so gemessenen Daten kann man nun das Schubmodul nach (10) bestimmen. Zusätzlich geht noch das Trägheitsmoment der Kugelhalterung θ_{KH} in die Rechnung ein. Jedoch ergibt diese keinen sehr großen Unterschied im errechneten Wert von G, da $\theta_{KH} = 2,25 [\text{g} \cdot \text{cm}^2]$ und somit erheblich kleiner als das Trägheitsmoment der Kugel ist.

Dabei ist im folgenden m_K die Masse der Kugel, R_K deren Radius, l_D die Gesamtlänge des Drahtes, R der Durchmesser des Drahtes und T die Periodendauer der Schwingung.

$$G = \frac{16}{5} \pi \frac{m_K R_K^2 l_D}{T^2 R^4} \Rightarrow G = \frac{8 \cdot l_D}{r_D^4 \cdot T^2} \pi \cdot \left(\frac{2}{5} m_K R_K^2 + \theta_{KH} \right) \text{ (mit berücksichtigter Kugelhalterung)}$$

Wir erhalten als Trägheitsmoment der Kugel

$$\theta_{Kugel} = \frac{2}{5} m_K R_K^2 = (1,32 \cdot 10^{-4} \pm 5,88 \cdot 10^{-8}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

l_1 [cm]	l_2 [cm]	d_D [μm]	
55,8	5,3	196	
55,9	5,5	196	
55,8	5,4	200	
55,6	5,5	197	
55,7	5,4	199	
55,7	5,3	200	
55,7	5,4	199	
55,6	5,3	199	
55,7	5,4	199	
55,7	5,4	201	
55,72	5,39	198,6	Mw.
0,03	0,02	0,5	s
0,05%	0,43%	0,27%	r

Tabelle 2: Abmessungen des Drahtes

Kugelmasse m_K [g]	$512,2 \pm 0,04\%$
Kugeldurchmesser d_K [mm]	$50,76 \pm 0,01\%$
Trägheitsmoment der Kugelhalterung θ_{KH}	$22,5 [\text{gcm}^2]$

Tabelle 3: Angegebene Daten

T[s]	T[s]
17,157	17,133
17,099	17,129
17,090	17,117
17,146	17,118
17,153	17,116
17,155	17,123
17,144	17,136
17,136	17,131
17,154	17,125
17,161	17,128
Mw.	17,133
s	$4,28 \cdot 10^{-3}$
r	0,03%

Tabelle 4: Periodendauer der Schwingung

mit einem relativen Fehler von 0,04 % nach

$$r_{\theta_{Kugel}} = \sqrt{r_{m_k}^2 + r_{R_k}^2} .$$

Somit berechnet sich dann das Schubmodul zu

$$G = (7,22 \cdot 10^{10} \pm 7,91 \cdot 10^8) N/m^2 \quad (r_G = 1,09\%)$$

Der Fehler ergibt sich dabei aus der quadratischen Addition der relativen Fehler der verwendeten Größen. Die Vorfaktoren kommen bei Größen zustande, die quadratisch bzw. in vierter Potenz in die Gleichung eingehen. Diese Vereinfachung lässt sich jedoch nur anwenden, da $s_{\theta_{KH}} = 0$ (bzw. unbekannt) ist.

$$r_G = \sqrt{r_{L_D}^2 + 16r_{r_D}^2 + 4r_{T_D}^2 + r_{m_K}^2 + 4r_{R_K}^2}$$

Man findet einen Literaturwert (aus "Kuchling - Taschenbuch der Physik") von $8 \cdot 10^{11} N/m^2$. Man stellt eine deutliche Abweichung vom Literaturwert fest.

4.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls E eines Stahlstabes

Das Elastizitätsmodul bestimmt man durch die Gleichung:

$$E = c^2 \cdot \rho = \frac{m_S}{\pi r_S^2 \cdot L_S} \cdot \frac{L_S^2}{T_S^2} = \frac{m_S \cdot L_S}{\pi r_S^2 \cdot T_S^2}$$

Zur Berechnung des Fehlers nutzen wir nach Gauss:

$$r_E = \sqrt{r_{L_S}^2 + 4r_{T_S}^2 + 4r_{r_S}^2}$$

Der verwendete Stahlstab hatte die in Tabelle 5 angegebenen Abmessungen. Weiterhin beobachtet man die in Tabelle 6 dargestellten Laufzeiten. Hierbei ist zu beachten, dass die Laufzeit für die 20-fache Stablänge gemessen wurde, die dann auch entsprechend in die Gleichung eingesetzt werden muß. Man erhält somit eine Dichte des Stahlstabes von

Gewicht [g]	L_S [cm]	d_s [mm]
356,4	58,030	9,985
	58,025	9,984
	58,035	9,987
	58,035	9,983
	58,040	9,980
	58,025	9,982
	58,030	9,984
	58,035	9,989
	58,040	9,983
	58,040	9,979
Mw.	58,034	9,9836
s	0,0018	0,0005
r	0,003%	0,009%

Tabelle 5: Abmessungen des Stahlstabes

T_S [μs]	T [μs]
2247	2249
2247	2247
2249	2248
2248	2247
2247	2248
2247	2247
2246	2247
2248	2248
2248	2248
2249	2247
Mw.	2247,6
s	0,18
r	0,01%

Tabelle 6: Schalllaufzeiten im Stahlstab (20-fache Länge)

$$\rho = (7845,03 \pm 0,78) \frac{kg}{m^3}$$

außerdem ergibt sich durch Länge und Laufzeit die Schallgeschwindigkeit in Stahl

$$c = (5164,04 \pm 0,45) \frac{m}{s}$$

Beide Werte stimmen gut mit den Literaturwerten (aus "Kuchling - Taschenbuch der Physik") überein.

Man findet Werte von $c_{lit} = 5100 m/s$ für die Schallgeschwindigkeit und $\rho_{lit} = 7800 kg/m^3$ für die Dichte von Cobalt-Stahl.

Das Elastizitätsmodul E ergibt sich nach der obigen Formel zu

$$E = (2,092 \pm 0,0005) \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} \text{ mit } r_E = 0,03\%$$

Man findet (wieder aus "Kuchling - Taschenbuch der Physik") einen Literaturwert von $E_{lit} = 2,1 \cdot 10^{11} N/m^2$ und stellt somit eine gute Übereinstimmung fest.

4.3 Berechnung der Querkontraktionszahl μ und des Kompressionsmoduls Q von Stahl

Aus (3) und (4) entnehmen wir die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} E &= 2G(\mu + 1) \\ E &= 3Q(1 - 2\mu) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen formen wir nach Q bzw. μ um

$$\begin{aligned} Q &= \frac{E}{3(3 - \frac{E}{G})} \\ \mu &= \frac{E}{2G} - 1 \end{aligned}$$

Mit den bereits errechneten Werten

$$\begin{aligned} E &= (2,092 \pm 0,0005) \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} \\ G &= (7,22 \cdot 10^{10} \pm 7,91 \cdot 10^8) \frac{N}{m^2} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} Q &= (6,72 \pm 2,06) \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} \\ \mu &= 0,45 \pm 1,59 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Die Fehler ergaben sich dabei durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung:

$$s_\mu = \sqrt{\left(\frac{1}{2G}\right)^2 s_E^2 + \left(\frac{-E}{2G^2}\right)^2 s_G^2}$$

$$s_Q = \sqrt{\left(\frac{9G^2}{(9G - 3E)^2}\right)^2 s_E^2 + \left(\frac{3E^2}{(9G - 3E)^2}\right)^2 s_G^2}$$

Man findet Literaturwerte (aus "Kuchling - Taschenbuch der Physik") von $Q_{lit} = 1,6 \cdot 10^{11} N/m^2$ und $\mu_{lit} = 0,29$.

Man kann starke Abweichungen bei den bei den Werten beobachten. Da die Bestimmung von E über die Schallgeschwindigkeit sehr exakt ist und E auch sehr gut mit dem Literaturwert übereinstimmt, wird der Fehler sicherlich (wie auch bereits beim Vergleich mit dem Literaturwert auffällt) bei der Bestimmung des Schubmoduls G liegen.

Dies deckt sich sehr gut mit den Erfahrungen während des Experiments, da es häufiger zu Problemen bei der Messung der Schwingungsdauer kam (vgl. Fehlerbetrachtung).

4.4 Experimentelle Bestimmung des Dipolmoments \vec{m} eines Permanentmagneten

Wir haben die in Tabelle 7 angegebenen Werte gemessen bzw. ermittelt.

Das Magnetfeld ergibt sich dabei durch

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{R}$$

Gegeben waren die Windungszahl der Spule $N = 390$ und der Radius $R = 78$ mm.

In Abb.7 ist B gegen die inverse quadratische Schwingungsdauer geplottet. Somit erhalten wir die in Tabelle 8 angegebenen Werte durch lineare Regression der Funktion $f(x) = a \cdot x + b$. Die Regression führten wir mit dem Programm Gnuplot durch, daß die Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet.

Aus Gleichung (19) ergibt sich nach dem Umstellen nach B und dem Einsetzen der Richtgröße D des Zylinders nach Gleichung (7)

$$B = \frac{4\pi^2\theta}{m} \frac{1}{T_m^2} - \frac{\pi GR_D^4}{2Lm}$$

Man erkennt, das die Steigung der Regressionsgerade gerade $a = \frac{4\pi^2\theta}{m}$ entspricht.

Durch umformen des Ausrucks nach m und dem einsetzen der bekannten Ausdrücke für das Trägheitsmoment der Kugel sowie der Halterung ergibt sich dann

$$m = \frac{4\pi^2 \left(\frac{2}{5}m_K R_K^2 + \theta_{Kugelh.}\right)}{a}$$

I[A]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
T[s]	11,310	9,109	7,782	6,882	6,306	5,784	5,388	5,078	4,828	4,529
	11,313	9,087	7,765	6,882	6,268	5,825	5,422	5,080	4,782	4,605
	11,259	9,068	7,755	6,881	6,303	5,800	5,413	5,079	4,854	4,626
	11,226	9,108	7,753	6,882	6,250	5,766	5,389	5,080	4,811	4,541
	11,194	9,088	7,764	6,878	6,277	5,771	5,436	5,068	4,802	4,632
	11,205	9,073	7,726	6,879	6,306	5,814	5,426	5,095	4,858	4,570
	11,231	9,111	7,788	6,880	6,245	5,813	5,389	5,076	4,790	4,560
	11,273	9,064	7,802	6,880	6,278	5,760	5,427	5,087	4,838	4,637
	11,259	9,081	7,802	6,879	6,309	5,755	5,441	5,096	4,846	4,540
	11,280	9,085	7,800	6,879	6,263	5,813	5,381	5,072	4,772	4,587
	Mw.	11,225	9,087	7,774	6,880	6,281	5,790	5,411	5,081	4,818
s ±	0,014	0,018	0,004	0,012	0,010	0,003	0,004	0,011	0,011	0,015
r %	0,11%	0,17%	0,04%	0,15%	0,14%	0,05%	0,07%	0,18%	0,19%	0,28%
B [mT]	0,45	0,90	1,35	1,80	2,25	2,70	3,15	3,60	4,05	4,50
1/T ² [1/s ²]	0,008	0,012	0,017	0,021	0,025	0,030	0,034	0,039	0,043	0,048

Tabelle 7: Werte zur Bestimmung des Dipolmoments

a [$mT \cdot s^2$]	b[mT]
101,79 ± 0,24	-0,34 ± 0,01

Tabelle 8: Regressionsparameter

Mit den bekannten Werten für die in der Gleichung auftretenden Größen erhält man das magnetische Moment

$$m = (0,052 \pm 1,21 \cdot 10^{-4}) Nm/T.$$

Der Fehler berechnet sich nach Gauß durch die Summen der relativen Fehlerquadrate:

$$r_m = \sqrt{r_{m_K}^2 + 4r_{R_K}^2 + r_a^2}$$

4.5 Fehlerdiskussion

- Größte Fehlerquelle bei der Bestimmung des Schubmoduls stellt mit Sicherheit die (Un)Genauigkeit der Apparatur zur Messung der Schwingungsdauern dar. Dadurch, daß durch das Anregen von Drehschwingungen auch sehr häufig das ganze System in Schwingung gerät, werden die Zeitmessungen mitunter sehr stark verfälscht. Weitere, jedoch viel weniger stark wiegende Ungenauigkeiten treten durch vorhandene Ungenauigkeiten der Messinstrumente auf.
- Bei der Bestimmung des E-Moduls kann ein schlechter Kontakt zwischen Tonabnehmer und Stahlstab dazu führen, daß die Laufzeitmessung verfälscht wird.
- Bei der Bestimmung des magnetischen Dipolmoments treten neben Messungenauigkeiten und den bereits bei der Bestimmung des Schubmoduls aufgetretenen Effekten evtl. auch inhomogenitäten im Magnetfeld auf.

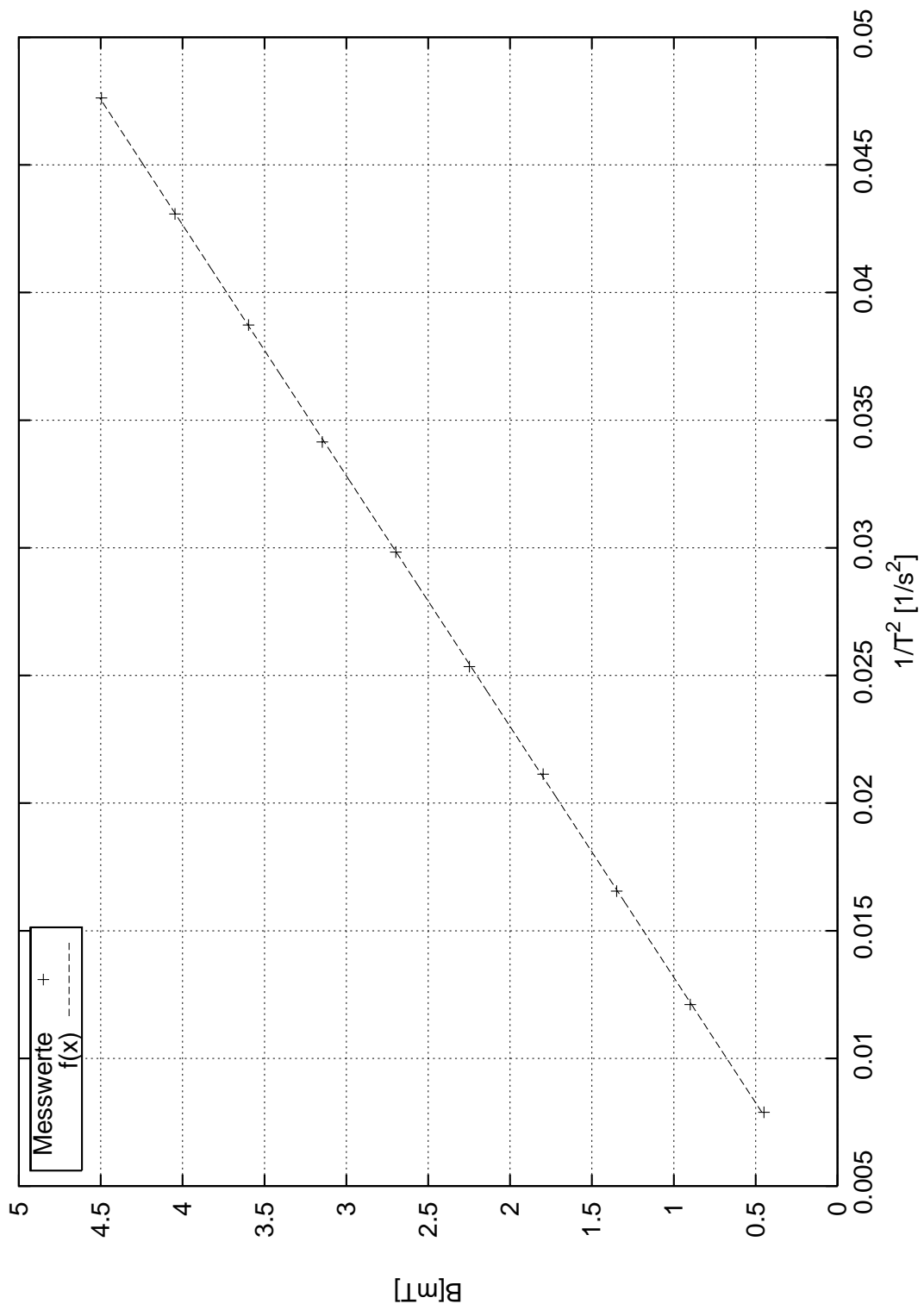


Abbildung 8: B in Abhängigkeit der quadratischen inversen Schwingungsdauer