

Physik III - Anfängerpraktikum- Versuch 103

Sebastian Rollke (103095) und Daniel Brenner (105292)

21. September 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Zielsetzung	2
2	Theorie	2
2.1	Biegung bei einseitiger Einspannung	2
2.2	Biegung bei zweiseitiger Auflage	5
2.3	Bestimmung des Elastizitätsmodules durch die Schallgeschwindigkeit in Festkörpern	6
3	Durchführung	8
3.1	Vermessung elastisch gebogener Stäbe	8
3.2	Messung der Schallgeschwindigkeit	9
4	Fehlerbetrachtung	9
4.1	Fehlerarten	9
4.2	Stichprobenfehler	10
4.3	Fehlerfortpflanzung	10
4.4	Lineare Regression	10
5	Auswertung	12
5.1	Eigenschaften der verwendete Proben	12
5.1.1	Kupferstab mit eckigem Querschnitt	12
5.2	Messingstab mit rundem Querschnitt	13
5.3	Einseitige Einspannung	13
5.3.1	Kupferstab mit eckigem Querschnitt	13
5.3.2	Messingstab mit rundem Querschnitt	14
5.4	Beidseitige Auflage - Kupferstab mit eckigem Querschnitt	16
5.5	Schhallgeschwindigkeitsmessung	19
5.5.1	Kupferstab - eckiger Querschnitt	19
5.5.2	Messingstab - runder Querschnitt	23
6	Ergebnisüberprüfung mittels Student'schem T-Test	25

1 Einleitung und Zielsetzung

Auf einen jeden Körper können Kräfte wirken, welche Gestalts- und Volumensveränderungen hervorrufen können. Die physikalische Größe hinter dieser Beobachtung ist die Spannung, welche sich auf eine bestimmte Fläche auswirkt. Ihre Komponente senkrecht zur Oberfläche ist die sogenannte Normalspannung σ oder auch Druck genannt, welche bei einer linearen Körperdimension L in ihre Richtung eine Längenveränderung ΔL verursacht.



Abbildung 1: Dehnung einer stabförmigen Probe unter dem Einfluss einer Normalspannung

Der Zusammenhang von Druck und der relativen Längenänderung lässt sich bei hinreichend kleiner Gestaltsänderung, mit dem Hookeschen Gesetz darstellen:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

Der Proportionalitätsfaktor E steht für den Elastizitätsmodul, welcher eine wichtige Materialkonstante darstellt und in diesem Versuch für zwei metallische Stäbe bestimmt werden soll. Für eine exakte Messung dieser Längenänderung ΔL müsste allerdings eine Messapparatur vorausgesetzt werden, mit der sich extrem kleine Längenänderungen zuverlässig feststellen ließen. Da diese Messgeräte uns nicht zur Verfügung stehen, bestimmen wir den Elastizitätsmodul durch die Biegung des Stabes und der Schalllaufzeitmessungen.

2 Theorie

2.1 Biegung bei einseitiger Einspannung

Von einer Biegung ist die Rede, wenn eine Kraft F wie in Abbildung 2 gezeigt auf den Probekörper wirkt. Nun lässt sich eine Durchbiegung $D(x)$, also die Verschiebung des Oberflächenpunktes in Richtung der Kraft an der Stelle x ermitteln, welche die Verschiebung zwischen belastetem und unbelastetem Zustand darstellt.

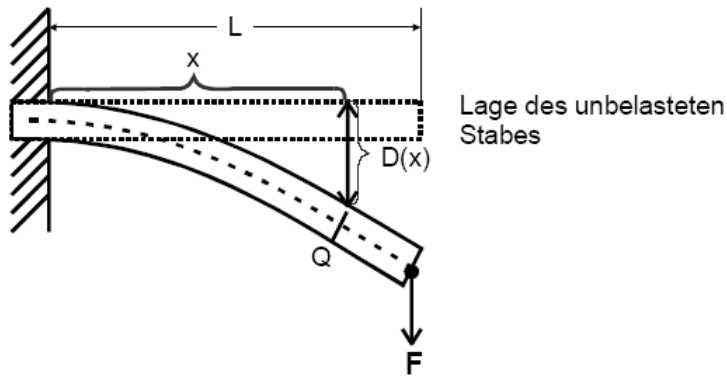


Abbildung 2: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung

Wie man leicht sehen kann, wird im Fall der einseitigen Einspannung die obere Hälfte des Stabes gestreckt, die untere hingegen gestaucht, in der Mitte existiert aber eine sogenannte neutrale Faser (dargestellt durch die gestrichelte Linie) welche spannungsfrei ist, da sich hier gerade Zug- und Druckspannung aufheben. In dem Stab entstehen nun unter Belastung Gegenspannungen, die versuchen den Stab in seine ursprüngliche Lage zurück zu bringen.

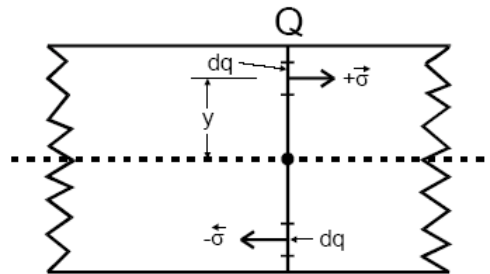


Abbildung 3: Skizze zur Berechnung des Drehmomentes M_σ

Betrachtet man wie in Abbildung 3 zu sehen den Bereich um den Querschnitt Q, so bekommt man das Drehmoment M_σ

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq \quad (2)$$

mit dem Abstand y des Flächenelementes dq von der neutralen Faser (siehe Abbildung 3)

Dieses ist nun gleich dem Drehmoment M_F , da sich die Deformation der Probe so einstellt, dass an jeder Stelle x die Drehmomente übereinstimmen. Mit der Kraft über den Hebelarm $L - x$ ergibt sich:

$$M_F = F(L - x) \quad (3)$$

Das Gleichgewicht der Momente ist also nach (2) und (3):

$$\int_Q y \sigma(y) dq = F(L - x) \quad (4)$$

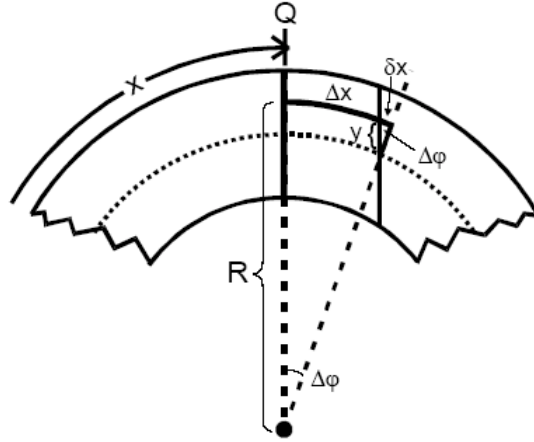


Abbildung 4: Skizze zur Berechnung der Normalspannung $\sigma(y)$ in einem gebogenen Stab

Durch das Hookesche Gesetz lässt sich die Normalspannung $\sigma(y)$ als

$$\sigma(y) = E \frac{\delta x}{\Delta x}$$

bestimmen, wobei δx die Längenänderung der Faser mit der Ausgleichslänge Δx infolge Durchbiegung ist (siehe Abbildung 4). Da δx sehr viel kleiner Δx ist, lässt sich dieses vereinfachen zu

$$\sigma(y) = E \frac{y}{R} \quad (5)$$

mit dem Krümmungsradius R der Faser an der Stelle x

Aus der Differentialgeometrie bekommt man für geringe Kurvenkrümmungen (also für ein großes R) die Beziehung:

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2 D}{dx^2}$$

wenn $\left(\frac{dD}{dx}\right)^2 \ll 1$ ist. Somit wird die Gleichung (5) zu

$$\sigma(y) = Ey \frac{d^2 D}{dx^2} \quad (6)$$

Durch einsetzen in (4) erhalten wir nun:

$$E \frac{d^2 D}{dx^2} \int_Q y^2 dq = F(L - x) \quad (7)$$

Das Flächenträgheitsmoment I wird durch

$$I := \int_Q y^2 dq \quad (8)$$

ausgedrückt. Integriert man nun zweimal über (7) und stellt nach D(x) um, erhält man schließlich:

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (\text{für } 0 \leq x \leq L) \quad (9)$$

Die Integrationskonstanten verschwinden durch die Randbedingungen $D(0) = 0$ (durch die horizontale Einspannung) und $\frac{\partial D}{\partial x}(0) = 0$ (da die Durchbiegung an der Einspannstelle Null ist).

2.2 Biegung bei zweiseitiger Auflage

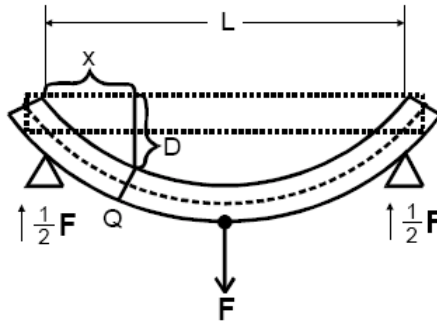


Abbildung 5: Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage

Eine andere Möglichkeit der Biegung eines homogenen Stabes ist wie in Abbildung 5 dargestellt ihn an beiden Enden aufzulegen und die Kraft F in der Mitte wirken zu lassen.

Die Beziehungen sind ähnlich wie bei der Biegung bei einseitiger Einspannung, jedoch muss man analog zu Formel (7) zwei Fälle unterscheiden, zu beachten ist dabei dass es zwei Drehmomente gibt mit je der halben Kraft. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Fall 1} \quad & \frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{F}{EI} \frac{x}{2} \quad (\text{bei } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \quad \text{mit } M_F = -\frac{F}{2}x \\ \text{Fall 2} \quad & \frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{1}{2} \frac{F}{EI} (L - x) \quad (\text{bei } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \quad \text{mit } M_F = -\frac{F}{2}(L - x) \end{aligned}$$

Die Integration der beiden Gleichungen liefert:

$$\text{Fall 1} \quad \frac{dD}{dx} = -\frac{F}{EI} \frac{x^2}{4} + C \quad (\text{bei } 0 \leq x \leq \frac{L}{2})$$

$$\text{Fall 2} \quad \frac{dD}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{F}{EI} (Lx - \frac{x^2}{2}) + C \quad (\text{bei } \frac{L}{2} \leq x \leq L)$$

Nach weiterer Integration über beide Gleichungen erhält man schließlich:

$$\text{Fall 1} \quad D(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2x - 4x^3) \quad (\text{bei } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \quad (10)$$

$$\text{Fall 2} \quad D(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad (\text{bei } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \quad (11)$$

Auch hier verschwinden wieder die Integrationskonstanten, da $D(0) = 0$ und analog dazu für den zweiten Fall $D(L) = 0$

Mit Hilfe der Gleichungen (9), (10) und (11) lässt sich nun der Elastizitätsmodus bestimmen.

2.3 Bestimmung des Elastizitätsmodules durch die Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

Wird ein Schallimpuls durch einen Stoß auf die Stirnseite eines langen dünnen Stabes gegeben, so durchläuft eine longitudinale Deformation diesen, es kommt also Ortsabhängig zu unterschiedlichen Spannungen. Die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes wird hier vorausgesetzt, womit gilt

$$\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

und

$$\sigma + d\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x} + E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

mit der Länge des Volumenelementes ∂x und der spannungsbedingten Längenänderung $\partial \xi$.

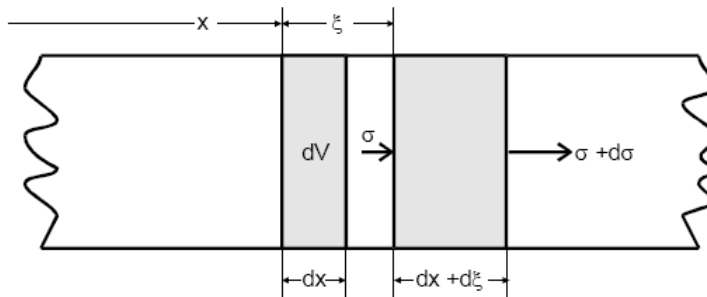


Abbildung 6: Skizze zur Ableitung eines Zusammenhangs zwischen Elastizitätsmodul und Schallgeschwindigkeit

Das Volumenelement $dV = Q dx$ erfährt die Kraft

$$dF = Q((\sigma + d\sigma) - \sigma) = QE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

Die Masse des Stabes, die allgemein definiert ist als $dm = \rho dV$ mit der Dichte des Stabes ρ und dem Volumenelement V . Daraus folgt die Beschleunigung

$$b = \frac{dF}{dm} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (12)$$

Eine solche Gleichung wie in Formel (12) bezeichnet man als Wellengleichung, die nach d'Allembert mit der Funktion

$$\xi(x, t) = f(x \pm ct) \quad (13)$$

mit der Konstanten c gegeben ist. Setzt man (13) in (12) ein, bekommt man sofort für diese den Wert $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Diese Konstante c ist nichts anderes als die Schallgeschwindigkeit. Es ist also nun möglich durch messen der Dichte ρ und der Schallgeschwindigkeit c den Elastizitätsmodus zu bestimmen.

3 Durchführung

3.1 Vermessung elastisch gebogener Stäbe

Zur Vermessung elastisch gebogener Stäbe wird eine Apparatur wie in Abbildung 7 abgebildet genutzt. Hierbei kann der Stab wahlweise in der Spannvorrichtung C eingeklemmt oder auf den Fußpunkten A und B aufgelegt werden. Zur Biegung wird wahlweise bei beidseitiger Auflage ein Gewicht in der Mitte angehängt oder bei einseitiger Einspannung das Gewicht am beweglichen Ende des Stabes befestigt.

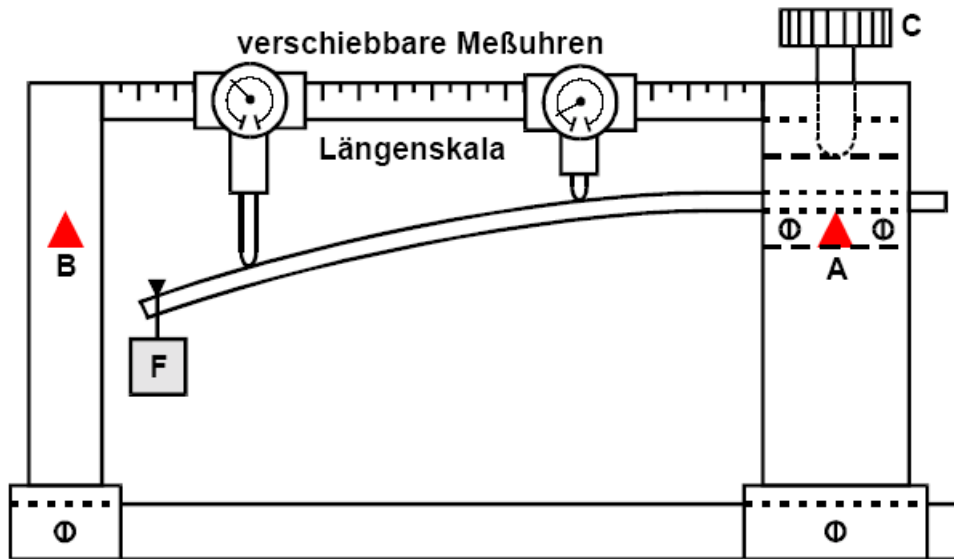


Abbildung 7: Schematische Darstellung einer Apparatur zur Vermessung elastisch gebogener Stäbe

An der Längenskala befinden sich zwei verschiebbare Meßuhren, welche Längenmessinstrumente sind, mit denen man mittels federnder Taststifte die Verschiebung des Metallstabes auf $10\ \mu\text{m}$ genau messen kann. Da allerdings nicht gewährleistet ist, dass die Stäbe an jeder Stelle exakt gerade sind, müssen die Uhren vor der Messung unter Belastung immer geeicht werden um eine relative Längenänderung von der Ruhelage zu erhalten. Dieses kann sehr leicht erreicht werden, indem man die Uhren vor jeder Messung unter Belastung so einstellt, dass ihr Zeiger im Ruhezustand auf null steht. Dies ist leicht zu erreichen, da die Ziffernblätter der Uhren drehbar sind. Erst danach wird das Gewicht angehängt und somit die Differenz zwischen Ruhelage und Belastungszustand exakt gemessen.

Für eine genaue Messung sollte die maximale Biegung des Stabes zwischen 4 und 7 mm liegen, zudem sollte im Bereich des größten Ausschlags auch eine größere Anzahl an Messungen durchgeführt werden als im Bereich der Einspannvorrichtung.

3.2 Messung der Schallgeschwindigkeit

Zur Messung der Schallgeschwindigkeit wird eine Apparatur verwendet, die in Abbildung 8 beschrieben ist.

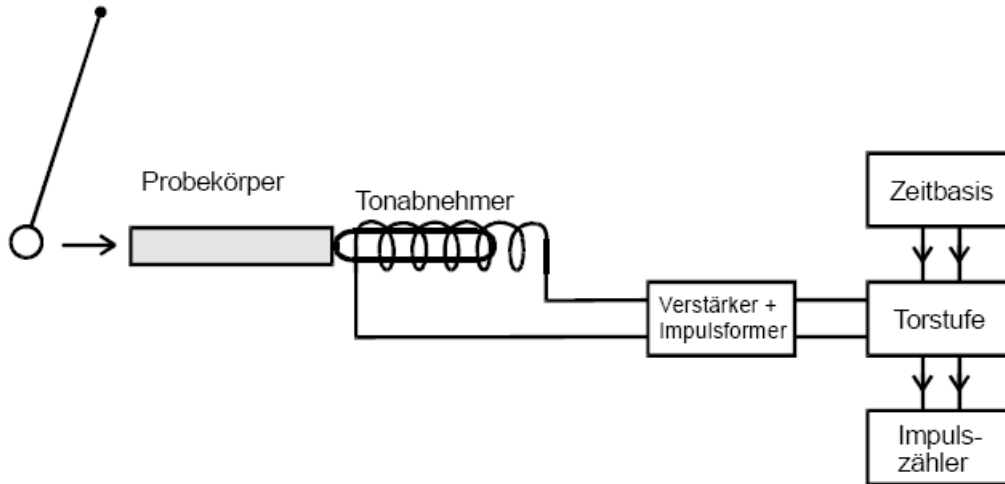


Abbildung 8: Schematische Darstellung einer Apparatur zur Messung der Laufzeit eines Schallimpulses in einem stabförmigen Probekörper

Mit einer Metallkugel, die auf die Stirnseite des Probekörpers trifft, wird ein Schallimpuls impliziert. Diese elastische Deformation durchläuft den Körper und trifft auf der entgegengesetzten Seite auf die zweite Stirnfläche und wird durch einen Tonabnehmer registriert und in einen elektrischen Impuls verwandelt, welcher einen Verstärker und eine Torstufe durchläuft. Sobald der Impuls die Torstufe erreicht, öffnet sie sich, so dass der quarzgesteuerte Zeitbasisgenerator einen Impuls in $1 \mu\text{sec}$ Abständen an das elektronische Zählwerk senden kann.

Da die Schallgeschwindigkeit in Materie deutlich größer ist als in Luft, wird der Schallimpuls zum größten Teil reflektiert und durchläuft den Probekörper wieder zum Anfang, wird wieder reflektiert und wird ein zweites Mal vom Tonabnehmer aufgenommen. Dieser sendet wieder ein Signal zur Torstufe, welche daraufhin wieder sperrt. Somit wird im Zählwerk die Zeit gemessen, die der Schall benötigt, um die doppelte Stablänge zu durchlaufen. Da aber der Schall nicht nur einmal reflektiert wird, sondern sehr oft kann auch mittels eines Umschalters an der Apparatur auch die Laufzeit für die zwanzigfache Stablänge gemessen werden.

Final wird nun noch die Dichte des Stabes bestimmt. Für diesen wird mittels einer sehr genauen Schieblehre (auf $0,002 \text{ cm}$ genau) die Abmessungen des Körpers bestimmt, sowie mit einer Präzisionswaage die Masse bestimmt.

4 Fehlerbetrachtung

4.1 Fehlerarten

Wir unterscheiden zwischen relativen (r) und absoluten Fehlern (s) einer Größe x . Die relativen Fehler ergeben sich durch die einfache Beziehung:

$$r := \frac{s}{x}$$

Wir verwenden zur Fehleranalyse die folgenden Gleichungen:

4.2 Stichprobenfehler

Bei einer Menge von Messwerten $(x_1 \dots x_i)$ für ein- und dieselbe Größe ergibt sich der Fehler jedes einzelnen Messwertes durch die Standardabweichung σ dieser Stichprobe nach

$$\sigma := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Zur Angabe des Endergebnisses einer solchen Stichprobe verwenden wir das arithmetische Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i$$

Der Fehler des arithmetischen Mittels ergibt sich dann durch

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

4.3 Fehlerfortpflanzung

Werden Berechnungen mit fehlerbehafteten Werten durchgeführt, so sind natürlich auch die resultierenden Größen fehlerhaft. Der Fehler s ergibt sich dann durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung mit den Messgrößen $x_1 \dots x_r$, deren Fehlern $s_1 \dots s_r$ und den errechneten Größen F :

$$s = \sqrt{s_1^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)}^2 + \dots + s_r^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_r} \right)_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)}^2}$$

Das Bilden der Ableitung kann man umgehen, wenn es sich bei der errechneten Größe um ein reines Produkt aus fehlerbehafteten Messwerten handelt. Dann erhält man vereinfacht:

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_i^2}$$

Mit r als dem Relativfehler des Ergebnisses und $r_1 \dots r_i$ als den Fehlern der einzelnen Werte $x_1 \dots x_r$.

4.4 Lineare Regression

Denn Fehler bei einer linearen Ausgleichsrechnung bestimmen wir wie folgt. Hierbei seien wieder $x_1 \dots x_i$ die einzelnen Messwerte.

Die Steigung der Regressionsgerade ergibt sich durch:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Und der Y-Achsenabschnitt der Regressionsgerade durch:

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Der Fehler der Steigung der Regressionsgeraden ergibt sich durch

$$s_a = \sqrt{\frac{1}{(n-2) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2}$$

Der Fehler des Y-Achsenabschnitts ergibt sich durch:

$$s_B = s_y^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Zur Bestimmung der Parameter der Regressionsgeraden, sowie deren Fehler wird das Programm Gnuplot verwendet.

5 Auswertung

5.1 Eigenschaften der verwendete Proben

Zunächst bestimmen wir nun die Abmessungen der verschiedenen Proben (Stäbe), deren Gewicht, Dichte und Trägheitsmoment.

5.1.1 Kupferstab mit eckigem Querschnitt

Die Fehler in der Tabelle ergeben sich durch den Stichprobenfehler.

Länge [cm]	[mm]	Höhe [mm]	Gewicht [g]
59,210	10,025	10,033	529,0
59,190	10,015	10,027	
59,200	10,017	10,002	
59,208	10,021	10,011	
59,206	10,027	10,011	
59,200	10,028	10,027	
59,208	10,033	10,048	
59,208	10,025	10,024	
59,206	10,023	10,019	
59,202	10,025	10,021	
59,203	10,024	10,023	Mittelwert
0,0018	0,0016	0,0039	Fehler +/-
0,00305%	0,01582%	0,03886%	Fehler %

Tabelle 1: Daten des Kupferstabes

Durch Integration erhalten wir für das Trägheitsmoment:

$$I_{eckig} = \frac{1}{12} \text{Breite} \cdot \text{Hoehe}^3 = (8,41 \cdot 10^{-10} \pm 9,90 \cdot 10^{-13}) m^4$$

Der Fehler ergibt sich nach:

$$r_I = \sqrt{r_{breite}^2 + 9 \cdot r_{hoehe}^2}$$

Mit dem Volumen des Stabes

$$V_{Kupfer} = \text{Laenge} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Hoehe}$$

ergibt sich die Dichte zu:

$$\rho_{kupfer} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = (8893,99 \pm 3,74) \frac{kg}{m^3}$$

Der Fehler berechnet sich nach:

$$r_{Dichte,eckig} = \sqrt{r_{Laenge}^2 + r_{Breite}^2 + r_{Hoehe}^2}$$

Der Literaturwert für die Dichte von Kupfer (aus "Kuchling - Taschenbuch der Physik") beträgt $8933 \frac{kg}{m^3}$.

Länge [cm]	Durchmesser [mm]	Gewicht [g]	
57,492	9,966	379,3	
57,494	9,976		
57,490	9,974		
57,500	9,977		
57,482	9,977		
57,480	9,977		
57,492	9,972		
57,464	9,976		
57,472	9,976		
57,480	9,976		
57,485	9,975		Mittelwert
0,0033	0,0010		Fehler +/-
0,0058%	0,0104%	Fehler %	

Tabelle 2: Daten des Messingstabes

5.2 Messingstab mit rundem Querschnitt

Die Fehler in der Tabelle ergeben sich durch den Stichprobenfehler.

Durch Integration in Kugelkoordinaten erhalten wir für das Trägheitsmoment:

$$I_{\text{rund}} = \frac{\pi}{4} \cdot \text{Radius}^4 = \frac{\pi}{4} \cdot (\text{Durchmesser}/2)^4 = (4,86 \cdot 10^{-10} \pm 2,02 \cdot 10^{-13}) \text{m}^4$$

Der Fehler ergibt sich nach Gauß zu:

$$r_I = 4 \cdot r_{\text{durchm.}}$$

Mit dem Volumen des Stabes

$$V_{\text{Messing}} = \pi(\text{Durchmesser}/2)^2 \cdot \text{Laenge}$$

ergibt sich die Dichte zu:

$$\rho_{\text{Messing}} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = (8458,62 \pm 3,51) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Wir erhalten den Fehler nach Gauß durch

$$r_{\text{Dichte,rund}} = \sqrt{4 \cdot r_{\text{durchm.}}^2 + r_{\text{laenge}}^2}$$

Der Literaturwert für die Dichte von Messing (aus "Kuchling - Taschenbuch der Physik") beträgt $8200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

5.3 Einseitige Einspannung

5.3.1 Kupferstab mit eckigem Querschnitt

Wir benutzten zur Belastung ein Gewicht von 1209,99 g und übten somit eine Kraft F von 11,866 N auf den Stab aus. Der Stab wurde so eingespannt, daß sein Ende (wo auch das Gewicht eingehängt wurde) L = 50,0 cm vom Einspannpunkt entfernt war.

Im folgenden Diagramm wird nun die Durchbiegung gegen $Lx^2 - x^3$ aufgetragen. Die Steigung der Regressionsgerade bestimmten wir durch Ausgleichsrechnung mit dem Programm Gnuplot zu $a = (0,0630 \pm 1,879 \cdot 10^{-4}) \frac{1}{\text{m}^2}$

Messpunkt[cm]	Durchbiegung [mm]	$Lx^2 - x^3[m^3]$
49,0	4,91	$8,08 \cdot 10^{-2}$
48,5	4,84	$7,96 \cdot 10^{-2}$
48,0	4,75	$7,83 \cdot 10^{-2}$
47,5	4,73	$7,71 \cdot 10^{-2}$
47,0	4,62	$7,58 \cdot 10^{-2}$
46,0	4,49	$7,34 \cdot 10^{-2}$
45,0	4,30	$7,09 \cdot 10^{-2}$
44,0	4,24	$6,84 \cdot 10^{-2}$
42,0	3,90	$6,35 \cdot 10^{-2}$
40,0	3,62	$5,87 \cdot 10^{-2}$
38,0	3,12	$5,39 \cdot 10^{-2}$
36,0	2,66	$4,92 \cdot 10^{-2}$
33,0	2,28	$4,25 \cdot 10^{-2}$
30,0	1,68	$3,60 \cdot 10^{-2}$
25,0	1,13	$2,60 \cdot 10^{-2}$
20,0	0,61	$1,73 \cdot 10^{-2}$
15,0	0,61	$1,01 \cdot 10^{-2}$
10,0	0,28	$4,67 \cdot 10^{-3}$
6,0	0,11	$1,73 \cdot 10^{-3}$
3,0	0,04	$4,41 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 3: Einseitige Einspannung - Kupferstab mit eckigem Querschnitt

Durch Umformen der Gleichung für die Durchbiegung D erhalten wir dann für den Elastizitätsmodul E:

$$E = \frac{F}{2DI_{eckig}} \cdot (Lx^2 - x^3)$$

Da die Steigung a der Regressionsgerade bekannt ist, vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$E = \frac{F}{2aI_{eckig}}$$

So erhalten wir für den Elastizitätsmodul $E = (1,120 \cdot 10^{11} \pm 3,592 \cdot 10^8) \frac{N}{m^2}$.

Der Fehler errechnet sich wieder durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung, mit den relativfehlern der Steigung und des Trägheitsmomentes:

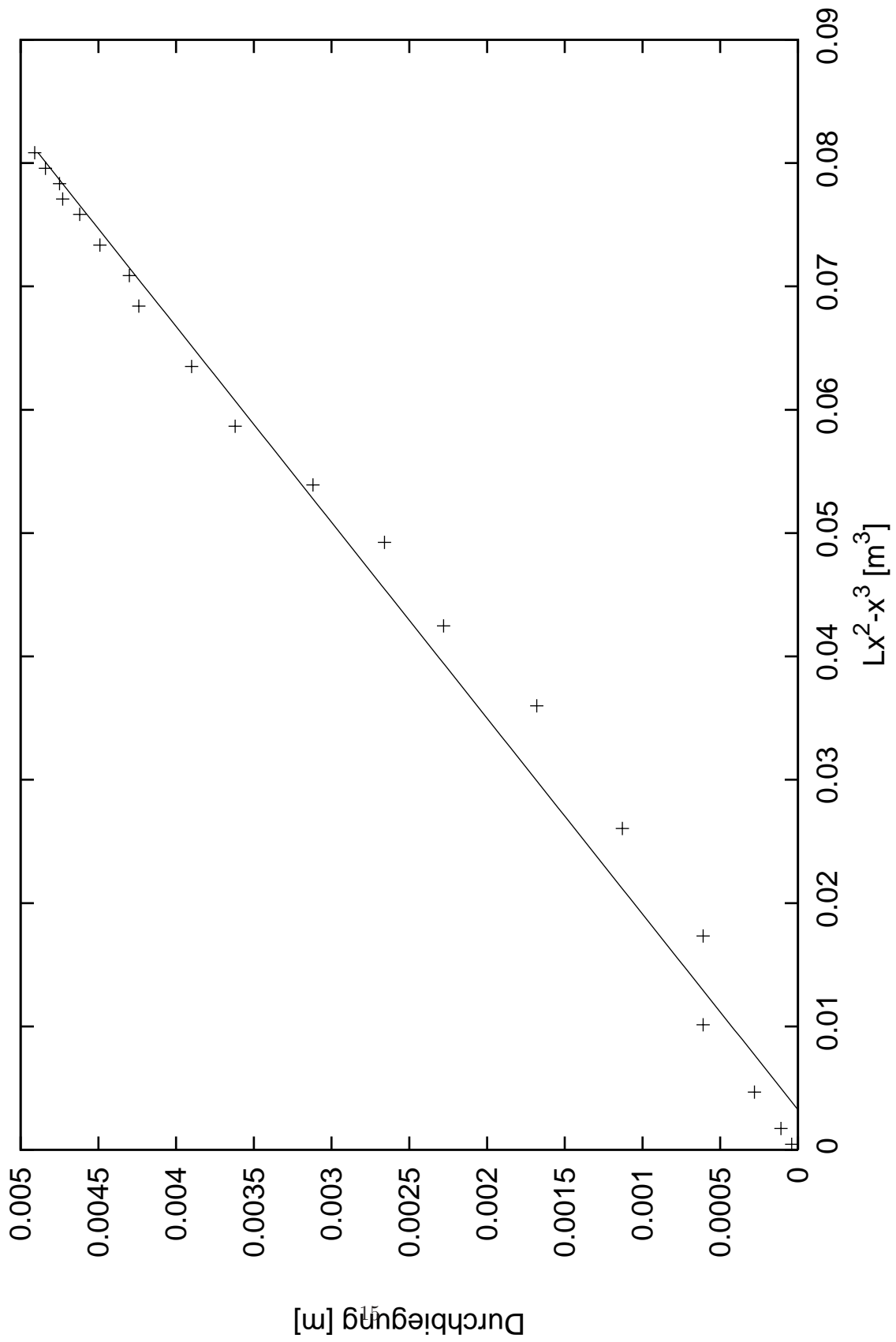
$$r_E = \sqrt{r_I^2 + r_a^2}$$

5.3.2 Messingstab mit rundem Querschnitt

Wir benutzten zur Belastung ein Gewicht von 532,19 g und übten somit eine Kraft F von 5,219 N auf den Stab aus. Der Stab wurde so eingespannt, daß sein Ende (wo auch das Gewicht eingehängt wurde) L = 50,0 cm vom Einspannpunkt entfernt war.

Im folgenden Diagramm wird nun die Durchbiegung gegen $Lx^2 - x^3$ aufgetragen. Die Steigung der Regressionsgerade bestimmten wir durch Ausgleichsrechnung mit dem Programm Gnuplot zu $a = (0,0503 \pm 8,469 \cdot 10^{-5}) \frac{1}{m^2}$

Einseitige Einspannung - Kupferstab



Messpunkt[cm]	Durchbiegung [mm]	$Lx^2 - x^3[m^3]$
49,0	4,02	$8,08 \cdot 10^{-2}$
48,5	3,93	$7,96 \cdot 10^{-2}$
48,0	3,84	$7,83 \cdot 10^{-2}$
47,5	3,90	$7,71 \cdot 10^{-2}$
47,0	3,84	$7,58 \cdot 10^{-2}$
46,0	3,77	$7,34 \cdot 10^{-2}$
45,0	3,58	$7,09 \cdot 10^{-2}$
44,0	3,53	$6,84 \cdot 10^{-2}$
42,0	3,31	$6,35 \cdot 10^{-2}$
40,0	3,03	$5,87 \cdot 10^{-2}$
38,0	2,88	$5,39 \cdot 10^{-2}$
36,0	2,59	$4,92 \cdot 10^{-2}$
33,0	2,30	$4,25 \cdot 10^{-2}$
30,0	1,94	$3,60 \cdot 10^{-2}$
25,0	1,43	$2,60 \cdot 10^{-2}$
20,0	0,94	$1,73 \cdot 10^{-2}$
15,0	0,42	$1,01 \cdot 10^{-2}$
10,0	0,22	$4,67 \cdot 10^{-3}$
6,0	0,08	$1,73 \cdot 10^{-3}$
3,0	0,01	$4,41 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 4: Einseitige Einspannung - Messingstab mit rundem Querschnitt

Durch Umformen der Gleichung für die Durchbiegung D erhalten wir dann für den Elastizitätsmodul E:

$$E = \frac{F}{2DI_{rund}} \cdot (Lx^2 - x^3)$$

Da die Steigung a der Regressionsgerade bekannt ist, vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$E = \frac{F}{2aI_{eckig}}$$

So erhalten wir für den Elastizitätsmodul $E = (1,068 \cdot 10^{11} \pm 1,852 \cdot 10^8) \frac{N}{m^2}$.

Der Fehler errechnet sich wieder durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung, mit den relativfehlern der Steigung und des Trägheitsmomentes:

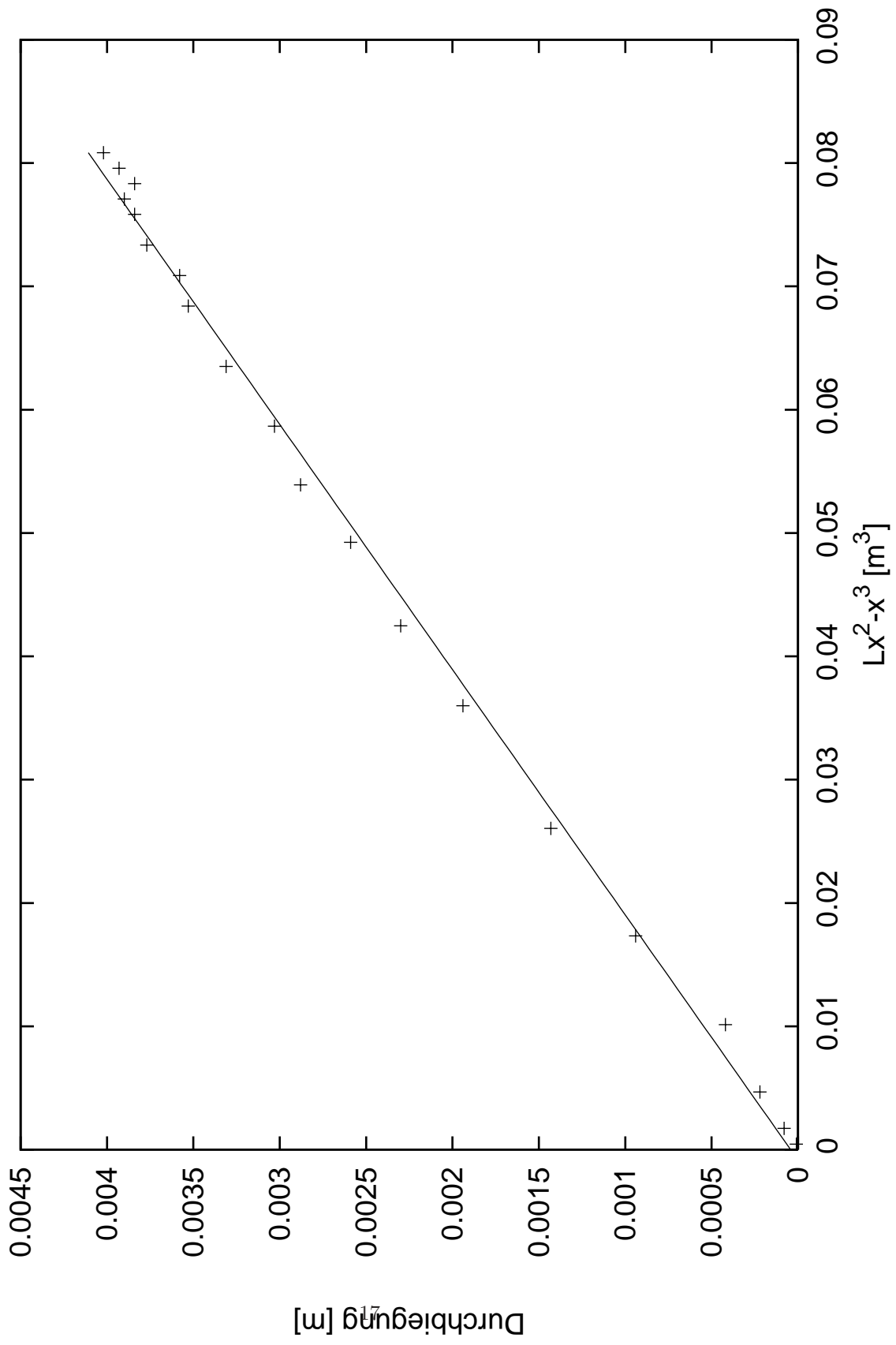
$$r_E = \sqrt{r_I^2 + r_a^2}$$

5.4 Beidseitige Auflage - Kupferstab mit eckigem Querschnitt

Der Abstand der Auflagepunkte betrug $L = 55$ cm. Wir benutzten zur Belastung ein Gewicht von 4035,1 g und übten somit eine Kraft F von 39,57 N auf den Stab aus. Bei dieser Messung erhalten wir zwei Elastizitätsmodule, einmal für die linke und einmal für die rechte Hälfte. Die Messungen mit dem Index 1 wurden für die Bestimmung des linken und diejenigen mit Index 2 für die Bestimmung des rechten E-Moduls verwendet.

Die in der folgenden Gleichung verwendeten Polynome "linke Seite" und "rechte Seite" ergeben sich durch die folgenden Gleichung (vgl. auch Theorieteil 2.2 Gleichungen 10 und 11), mit der

Einseitige Einspannung - Messingstab



Messposition als x-Wert.

$$\begin{aligned} \text{LinkeSeite} &:= 3Lx^2 - 4x^3 \text{ für } 0 \leq x \leq L/2 \\ \text{RechteSeite} &:= 4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3 \text{ für } L/2 < x \leq L \end{aligned}$$

Messp. ₁ [cm]	Messp. ₂ [cm]	Durchb. ₁ [mm]	Durchb. ₂ [mm]	$3Lx^2 - 4x^3$ [m ³]	$4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ [m ³]
26,5	28,5	1,25	1,33	0,166	0,166
25,5	29,5	1,30	1,31	0,165	0,165
24,5	30,5	1,28	1,32	0,164	0,164
23,0	32,0	1,22	1,29	0,160	0,160
21,0	34,0	1,09	1,23	0,154	0,154
19,0	36,0	1,08	1,15	0,145	0,145
17,0	38,0	1,00	1,09	0,135	0,135
15,0	40,0	0,90	1,00	0,123	0,123
13,0	42,0	0,78	0,90	0,109	0,109
11,0	44,0	0,68	0,78	0,095	0,095
7,0	48,0	0,42	0,52	0,062	0,062
3,0	52,0	0,17	0,24	0,027	0,027

Tabelle 5: Beidseitige Auflage - Kupferstab mit eckigem Querschnitt

Im den folgenden Diagrammen wird nun die Durchbiegung gegen das Polynome LinkeSeite bzw. RechteSeite aufgetragen. Die Steigungen der Regressionsgeraden bestimmten wir durch Ausgleichsrechnung mit dem Programm Gnuplot zu $a_l = (0,00801 \pm 3,23 \cdot 10^{-5}) \frac{1}{m^2}$ und $a_r = (0,00779 \pm 9,59 \cdot 10^{-6}) \frac{1}{m^2}$

Für den Elastizitätsmodul gilt nun:

$$E = \frac{F}{48DI} \cdot \text{LinkeSeite} \text{ für } 0 \leq x \leq L/2$$

$$E = \frac{F}{48DI} \cdot \text{RechteSeite} \text{ für } L/2 < x \leq L$$

Analog zum Verfahren bei der einseitigen Einspannung läßt sich auch dieses wieder vereinfachen zu:

$$E = \frac{F}{48Ia_l} \text{ für } 0 \leq x \leq L/2$$

$$E = \frac{F}{48Ia_l} \text{ für } L/2 < x \leq L$$

Somit erhalten wir für den Elastizitätsmodul $E_l = (1,224 \cdot 10^{11} \pm 5,141 \cdot 10^8)[N/m^2]$ und $E_r = (1,258 \cdot 10^{11} \pm 2,141 \cdot 10^8)[N/m^2]$. Die beiden Elastizitätsmodule unterscheiden sich somit um ca. 2,65 % voneinander.

Die Fehlerberechnung erfolgte wieder durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung aufgrund der fehlerbehafteten Messung des Trägheitsmomentes bzw. des Fehlers der Steigung der Regressionsgeraden nach

$$r_E = \sqrt{r_I^2 + r_a^2}$$

5.5 Schallgeschwindigkeitsmessung

5.5.1 Kupferstab - eckiger Querschnitt

Wir ermittelten die Laufzeit eines Schallimpulses innerhalb der Probe. Die Fehler in der Tabelle ergeben sich durch den Fehler des Mittelwertes.

Durch die aus der Theorie bekannten Zusammenhänge erhalten wir nun:

$$C_{schall1} = 2 \cdot \frac{\text{Laenge}}{\text{Laufzeit}} \text{ für Messungen über 1 Impuls}$$

$$C_{schall10} = 20 \cdot \frac{\text{Laenge}}{\text{Laufzeit}} \text{ für Messungen über 10 Impulse}$$

Der Faktor 2 erklärt sich dadurch, daß der Schall in dem Stab reflektiert wird und die Uhr erst wieder stoppt wenn er an seinem Ausgangspunkt angelangt ist. Somit legt er die doppelte Länge des Stabes als Weg zurück.

Der zusätzliche Faktor 10 bei der Messung über 10 Impulse ergibt sich dadurch, daß die doppelte Länge des Stabes zehn mal durchlaufen wird.

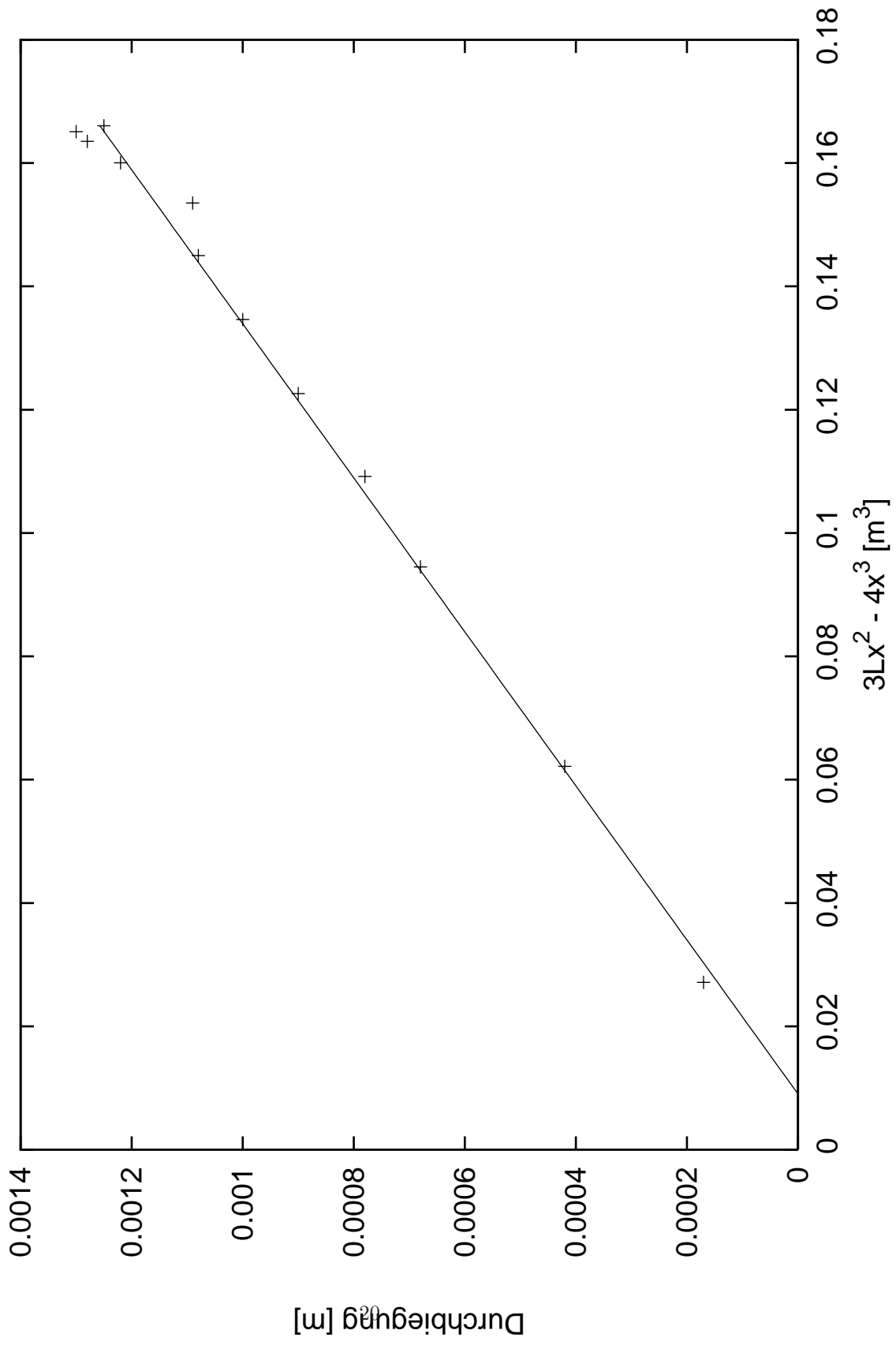
Wir erhalten somit eine Schallgeschwindigkeit in Kupfer von $C_{Kupfer1} = (3710,05 \pm 2,57)[m/s]$ bzw $C_{Kupfer10} = (3704,31 \pm 0,23)[m/s]$.

Was dem Literaturwert von 3800 [m/s] (aus "Kuchling - Taschenbuch der Physik") sehr nahe kommt.

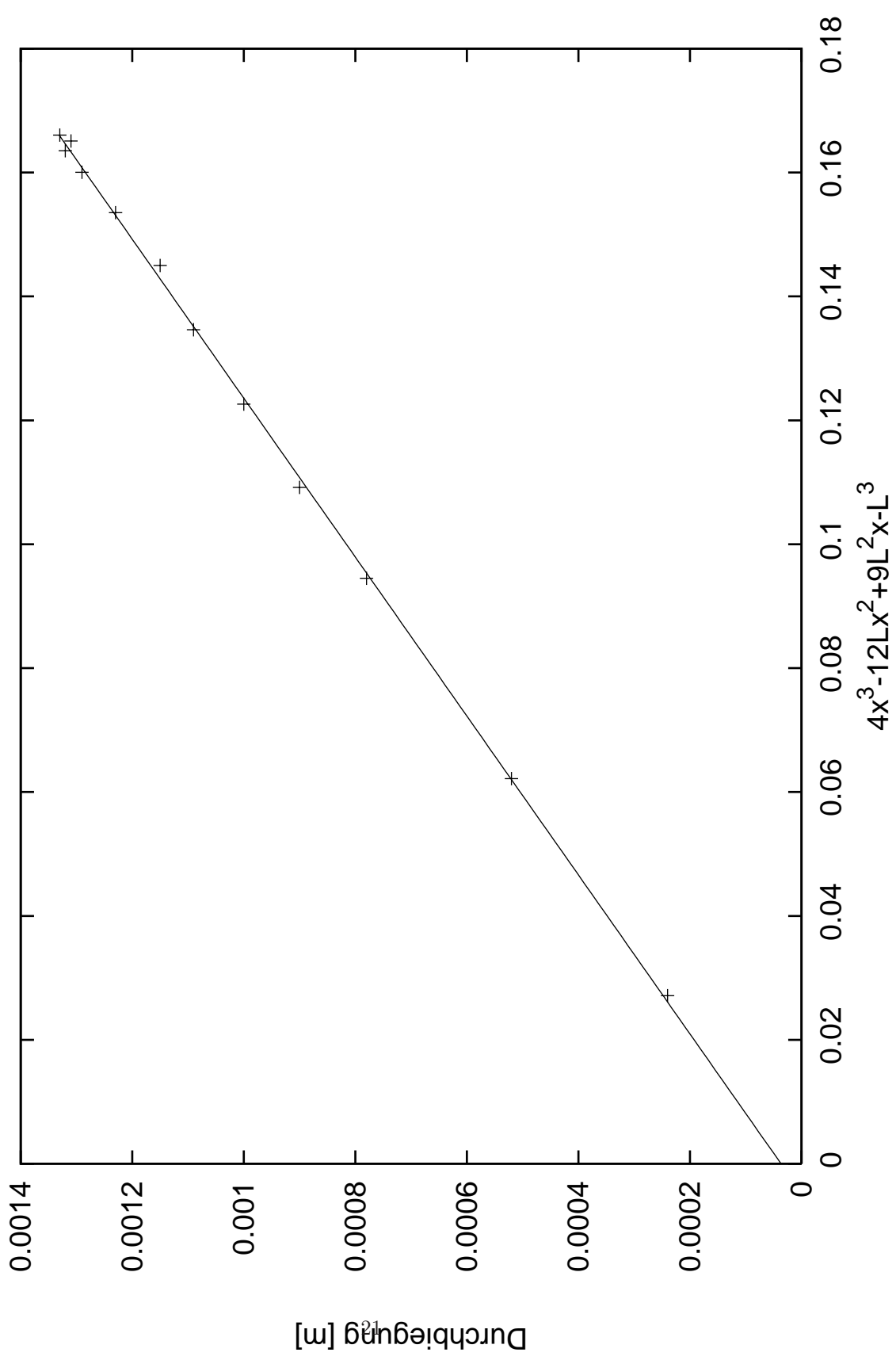
Der Fehler der Schallgeschwindigkeit ergibt sich nach Gauß durch den den Fehler der Länge bzw. des Fehlers der Laufzeit der Impulse nach

$$r_C = \sqrt{r_{Laenge}^2 + r_T^2}$$

Kupferstab - Beidseitige Auflage (links)



Messingstab - Beidseitige Auflage (rechts)



Laufzeit [μs] 1 Impuls	Laufzeit [μs] 10 Impulse	
317	3197	
317	3197	
318	3196	
318	3197	
319	3197	
319	3196	
319	3196	
320	3197	
319	3197	
320	3196	
320	3197	
320	3195	
319	3197	
320	3197	
320	3195	
319	3196	
320	3197	
320	3195	
319	3197	
320	3197	
319,15	3196,45	Mittelwert
0,2209	0,1698	Fehler +/-
0,0692%	0,0053%	Fehler%

Tabelle 6: Schallgeschwindigkeitsmessung - Kupferstab mit eckigem Querschnitt

Aus dem Zusammenhang:

$$C_{schall} = \sqrt{\frac{E}{\rho_{Kupfer}}}$$

ergibt sich dann der Ausdruck:

$$E = \rho_{Kupfer} \cdot C_{schall}^2 = \frac{Masse}{Laenge \cdot Breite \cdot Hoehe} \cdot C_{Schall}^2$$

Mit dem Einsetzen von $\frac{L}{T}$ für C erhalten wir:

$$E = \frac{Laenge \cdot Masse}{Breite \cdot Hoehe \cdot Laufzeit^2}$$

Durch diese Gleichung bestimmen wir den Elastizitätsmodul zu

$$\begin{aligned} E_{Kupfer1} &= (1,224 \cdot 10^{11} \pm 1,773 \cdot 10^8) [N/m^2] \\ E_{Kupfer10} &= (1,220 \cdot 10^{11} \pm 5,357 \cdot 10^5) [N/m^2] \end{aligned}$$

Hierbei stehen die Indizes für die Anzahl der Impulse bei der Messung. Die Fehler errechneten sich nach Gauß durch

$$r_E = \sqrt{4r_T^2 + r_{Breite}^2 + r_{Hoehe}^2 + r_{Laenge}^2}$$

5.5.2 Messingstab - runder Querschnitt

Wir ermittelten die Laufzeit eines Schallimpulses innerhalb der Probe. Die Fehler in der Tabelle ergeben sich durch den Fehler des Mittelwertes.

Laufzeit [μs] 1 Impuls	Laufzeit [μs] 10 Impulse	
333	3321	
335	3321	
338	3320	
330	3321	
330	3320	
330	3321	
330	3321	
329	3321	
330	3321	
339	3321	
330	3320	
330	3320	
330	3321	
330	3321	
330	3321	
330	3321	
330	3321	
337	3322	
330	3321	
331	3321	
335	3317	
	3317	
331,85	3320,48	Mittelwert
0,7007	0,2727	Fehler +/-
0,2111%	0,0082%	Fehler%

Tabelle 7: Schallgeschwindigkeitsmessung - Messingstab mit rundem Querschnitt

Ähnlich wie beim Kupferstab erhalten wir die folgende Gleichung:

$$E = \frac{4 \cdot \text{Laenge} \cdot \text{Masse}}{\pi \cdot \text{Durchm.}^2 \cdot \text{Laufzeit}^2}$$

	Schallgeschwindigkeit [m/s]	Elastizitätsmodul [N/m^2]
1 Impuls	$3464,49 \pm 7,32$	$1,015 \cdot 10^{11} \pm 4,309 \cdot 10^{11}$
10 Impulse	$3462,43 \pm 0,35$	$1,014 \cdot 10^{11} \pm 4,688 \cdot 10^{11}$

Tabelle 8: Schallgeschwindigkeitsmessung - Messingstab mit rundem Querschnitt

Die angegebenen Fehler berechneten sich analog zu den Messungen am Kupferstab durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung nach:

$$r_E = \sqrt{r_L^2 + 4 \cdot r_{\text{durchm.}}^2 + 4 \cdot r_T^2}$$

Man erkennt auch hier wieder eine gute Übereinstimmung der Schallgeschwindigkeit mit dem Literaturwert von 3500 [m/s] (aus "Kuchling - Taschenbuch der Physik). Der Fehler der Schallgeschwindigkeit errechnete sich wie beim eckigen Stab

6 Ergebnisüberprüfung mittels Student'schem T-Test

Der Studentsche t-Test wird benutzt, wenn mehrere Messergreihen für ein und dieselbe Größe vorliegen und bestimmt ob zwischen zwei Messungen ein systematischer Fehler vorliegt. Dazu wird ein t-Faktor folgender Maßen bestimmt:

$$t = \frac{\bar{x}_a - \bar{x}_b}{\sigma_D}$$

Dabei ist

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{s_a^2(n_a - 1) + s_b^2(n_b - 1)}{n_a + n_b - 2} \frac{n_a + n_b}{n_a \cdot n_b}}$$

wobei \bar{x}_a, \bar{x}_b die Erwartungswerte, s_a, s_b die mittleren Stichprobenfehler und n_a, n_b die Anzahl der Messungen der jeweiligen Messreihe a bzw. b sind.

Die \bar{x}_i sind hier die Elastizitätsmodule, die auf verschiedene Weise ermittelt wurden. Der Freiheitsgrad ν berechnet sich als $\nu = n_a + n_b - 2$, α ist das sog. Signifikanzniveau, das benötigt wird um den entsprechenden Wert der Verteilung zu bestimmen.

Zur Bestimmung benutzen wir die im Skript "Fehlerrechnung" angegebene Tabelle für die integrale Student'sche T-Verteilung.

Ist der für einen Vergleich ermittelte t-Wert größer als der Wert der Verteilung für die gewählten Parameter liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ ein Systematischer Fehler vor. Wir benutzen im folgenden ein Signifikanzniveau α von 0,002. Über die im folgenden mit * gekennzeichneten Vergleiche kann leider keine Aussage bezüglich des systematischen Fehlers gemacht werden, da die Tabelle keine Einträge für die entsprechende Anzahl an Freiheitsgraden enthielt.

Allerdings legen die ermittelten Werte nahe, daß auch bei diesen ein systematischer Fehler vorliegt.

Zur Berechnung benutzen wir im folgenden zusätzlich die Anzahl der Messungen. Dies waren 20 bei (1),(4) und (5). Bei den Messungen (2) und (3) verwendeten wir je 12 Messpunkte.

Kupferstab (eckig)	E-Modul [N/m ²]	Fehler +/-	Fehler %	Messungen
(1)Einseitige Einspannung	1,12 · 10 ¹¹	3,59 · 10 ⁹	0,32%	20
(2)Beidseitige Auflage (links)	1,22 · 10 ¹¹	5,14 · 10 ⁹	0,42%	12
(3)Beidseitige Auflage (rechts)	1,26 · 10 ¹¹	2,14 · 10 ⁹	0,17%	12
(4)Schallgeschwindigk. (10 Imp.)	1,22 · 10 ¹¹	5,30 · 10 ⁷	0,04%	20
(5)Schallgeschwindigk. (1 Imp.)	1,22 · 10 ¹¹	1,77 · 10 ⁸	0,14%	20

Tabelle 9: Messergebnisse am Kupferstab

Messingstab (rund)	E-Modul [N/m ²]	Fehler +/-	Fehler %	Messungen
(1)Einseitige Einspannung	1,07 · 10 ¹¹	1,85 · 10 ⁸	0,17%	20
(2)Beidseitige Auflage (links)	-keine Messung-	-	-	12
(3)Beidseitige Auflage (rechts)	-keine Messung-	-	-	12
(4)Schallgeschwindigk. (10 Imp.)	1,01 · 10 ¹¹	2,75 · 10 ⁷	0,35%	20
(5)Schallgeschwindigk. (1 Imp.)	1,02 · 10 ¹¹	4,29 · 10 ⁸	0,42%	20

Tabelle 10: Messergebnisse am Messingstab

Anhand dieser Messergebnisse führen wir die nun folgenden Vergleiche durch wobei das Kürzel "n.b" anzeigt, daß der zugehörige Wert der Verteilung nicht bekannt ist, ein "-" symbolisiert, daß

kein entsprechender Versuch durchgeführt wurde und ein "*" steht dafür, daß aufgrund fehlender Werte keine Aussage über den systematischen Fehler getroffen werden kann.

	Kupfer			Messing			ν	t_s
	σ_D	T	Sys.Fehler	σ_D	T	Sys.Fehler		
1:2	$1,54 \cdot 10^8$	67,5	99,80%	-	-	-	30	3,385
1:3	$1,15 \cdot 10^8$	119,92	99,80%	-	-	-	30	3,385
1:4	$8,12 \cdot 10^7$	123,62	*	$4,14 \cdot 10^7$	129,94	*	38	n.b.
1:5	$8,95 \cdot 10^7$	116,29	*	$3,51 \cdot 10^7$	149,89	*	38	n.b.
2:3	$1,44 \cdot 10^8$	23,13	*	-	-	-	22	3,505
2:4	$1,15 \cdot 10^8$	3,33	kein Fehler	-	-	-	30	3,385
2:5	$1,25 \cdot 10^8$	0,02	kein Fehler	-	-	-	30	3,385
3:4	$4,98 \cdot 10^7$	74,5	99,80%	-	-	-	30	3,385
3:5	$6,99 \cdot 10^7$	47,61	99,80%	-	-	-	30	3,385
4:5	$4,13 \cdot 10^7$	9,16	*	$2,11 \cdot 10^7$	5,71	*	38	n.b.

Tabelle 11: Student'scher T-test

Wie zu sehen ist, besteht zwischen den Versuchen 2 und 4 sowie 2 und 5 höchstwahrscheinlich kein systematischer Fehler.

Die Ursachen für systematische Fehler können vielfältig sein, u.a.:

- Ungenauigkeiten der Messinstrumente können Messungen verfälschen
- Erschütterungen können leicht zu Beeinflussungen der Biegunsmessungen führen
- Die Schallgeschwindigkeitsmessungen können durch unterschiedlich "guten" Kontakt des Stabes zum Tonabnehmer beeinflusst werden