

# Physik III - Anfängerpraktikum- Versuch 353

Sebastian Rollke (103095) und Daniel Brenner (105292)

21. September 2005

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Zielsetzung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
2.1	Der Entladevorgang . . . . .	2
2.2	Bestimmung der Frequenzabhängigkeit . . . . .	2
2.3	Nutzung als Integrator . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1	Zeitkonstante eines RC Gliedes . . . . .	6
4.2	Frequenzabhängigkeit der Amplitude . . . . .	7
4.3	Frequenzabhängigkeit der Phase . . . . .	8
4.4	Der RC-Kreis als Integrator . . . . .	8

# 1 Einleitung und Zielsetzung

Untersucht werden sollen sogenannte RC-Kreise, also Stromkreise im wesentlichen bestehend aus einem Kondensator und einem Widerstand, auf ihr Relaxationsverhalten. Durch einen Entladevorgang wird hierbei die Zeitkonstante gemessen und die Frequenzabhängigkeit der Amplitude und Phase der Kondensatorspannung bestimmt. Zuletzt soll gezeigt werden dass der RC-Kreis auch als Integrator genutzt werden kann.

## 2 Theorie

### 2.1 Der Entladevorgang

Zur Bestimmung der Zeitkonstante nutzen wir den Entladevorgang des Kondensators. Für die Kondensatorspannung gilt allgemein:

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (1)$$

nehmen wir nun das Ohmsche Gesetz mit

$$I = \frac{U_C}{R} \quad (2)$$

zur Hand, so folgt aus (1) und (2) sofort:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t) \quad (3)$$

Durch die Integration dieses Zusammenhanges folgt schließlich die Gleichung:

$$U_C(t) = U_C(0)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4)$$

In diesem Fall nun stellt der Ausdruck  $RC$  die Zeitkonstante dar.

### 2.2 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit

Zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit nutzt man zuerst den Ansatz

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

Nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetze lässt sich nun für den verallgemeinerten RC-Kreis durch die Gleichung

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) \quad \text{oder} \quad U_0 \cos \omega t = I(t)R + A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

ausdrücken.

Unter Berücksichtigung das

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_c}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

ist, folgt daraus direkt aus (6) und (7):

$$U_0 \cos \omega t = -A\omega RC \sin(\omega t + \varphi) + A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

Da (8) für alle t gültig sein muss folgt daraus für  $\varphi$ :

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (9)$$

Somit erkennt man das die Phasendifferenz Frequenzabhängig ist und für niedrige Frequenzen gegen null läuft, für hohe Frequenzen gegen  $\pi/2$ .

Für die Amplitude folgt schließlich:

$$A(\omega) = \frac{U_o}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (10)$$

Da die Amplitude für große  $\omega$  gegen null läuft wird der RC-Kreis auch oft als Tiefpass eingesetzt.

### 2.3 Nutzung als Integrator

Grundlage bildet auch hier wieder das zweite Kirchhoffsche Gesetz (6) in das wir den Ansatz von (7) einsetzen. Daraus folgt nun also:

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C(t) \quad (11)$$

Unter der Voraussetzung das  $\omega \gg 1/RC$ ,  $|U_C| \ll |U_R|$  und  $|U_C| \ll |U|$  ist lässt sich dies nun vereinfachen zu:

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} \quad (12)$$

oder

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (13)$$

### 3 Durchführung

Die Bestimmung der Zeitkonstanten wird ermöglicht durch eine Schaltung nach Abbildung 1:

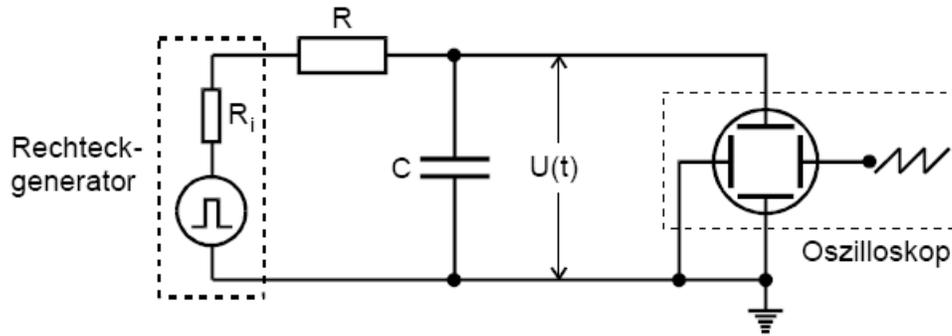


Abbildung 1: Messschaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten eines RC-Gliedes durch Beobachtung des Auf- oder Entladevorganges des Kondensators

Hierbei wird die Entladekurve auf einem Oszillographen festgehalten und anschließend zur Auswertung mit einem Thermodrucker ausgegeben.

Zur Messung der Amplitude der Kondensatorspannung wird eine Schaltung nach Abbildung 2 aufgebaut. Hierbei wird die Spannung durch einen Sinusgenerator gegeben und anschließend mit einem geeigneten Millivoltmeter gemessen. Für eine kurze Überprüfung der Frequenzunabhängigkeit der Generatorspannung wird anschließend diese direkt an das Millivoltmeter angeschlossen und anschließend das Frequenzband durchfahren.

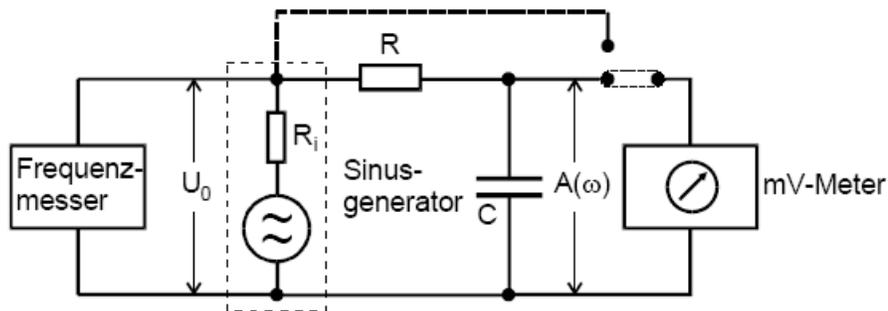


Abbildung 2: Messschaltung zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannungsamplitude  $A$  in einem RC-Kreis

Alternativ messen wir die gleiche Aufgabenstellung mit einem nach Abbildung 3 leicht veränderten Versuchsaufbau. Hierbei wird die Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz direkt graphisch durch einen XY-Schreiber aufgezeichnet.

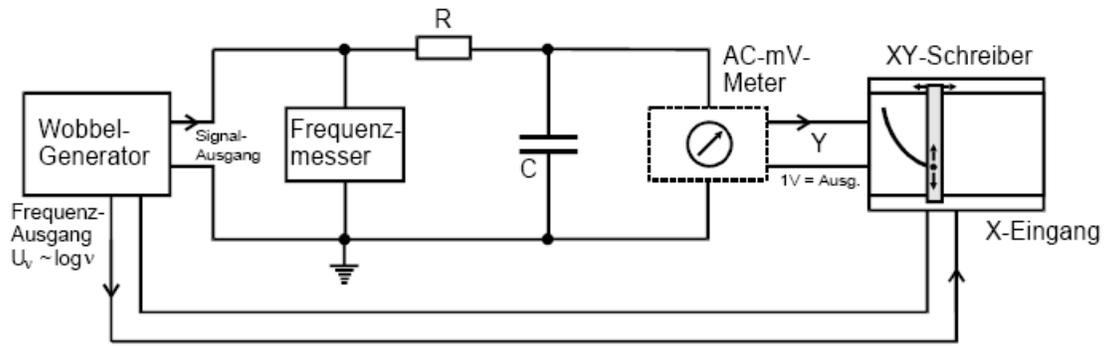


Abbildung 3: Schaltung zur Aufnahme des Frequenzganges mit einem wobbelbaren Generator

Zur Aufzeichnung der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz verändern wir die Schaltung des vorherigen Aufgabenteiles leicht durch Ersetzen des Millivoltmeters mit einem Zweistrahl-Oszilloskop (siehe Abbildung 4). Nun lässt sich am Bildschirm relativ einfach eine Verschiebung der Phasen an ihren Nulldurchgängen feststellen und ablesen.

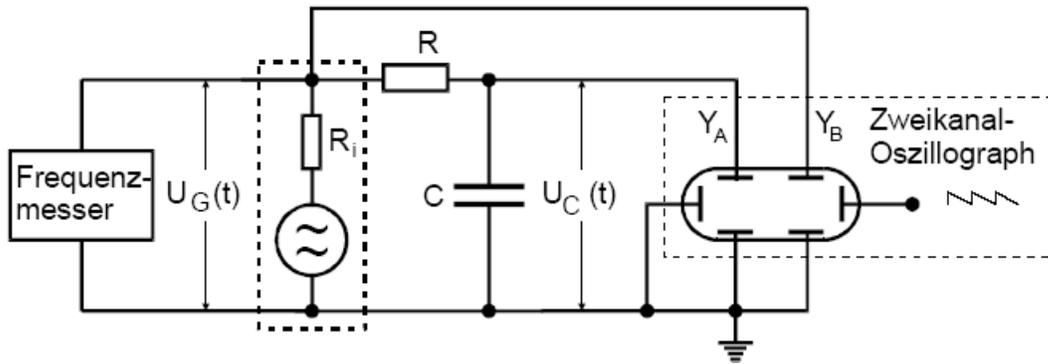


Abbildung 4: Schaltung zur Messung der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen mit einem Zweikanal-Oszilloskop

Für die letzte Aufgabenstellung wird wieder die Schaltung 6 genutzt, allerdings wird nun der Reihe nach bei geeigneter Frequenz eine Rechteck-, eine Sinus- und eine Dreiecksspannung auf das RC-Glied gegeben und anschließend das jeweilige Ergebnis zur Auswertung mit einem Thermodrucker festgehalten.

## 4 Auswertung

Wir haben das RC Glied "2" vermessen. Durch ein digitales Ohmmeter erhielten wir einen Innenwiderstand von  $15k\Omega$ .

### 4.1 Zeitkonstante eines RC Gliedes

Aus dem Theromdruck (zu finden im Anhang) entnehmen wir die in Tabelle 1 dargestellten Werte.

$U_c$ [V]	t [ms]	$\ln(U_c/U_0)$
4,00	0,10	1,39
3,75	0,20	1,32
3,50	0,35	1,25
3,00	0,50	1,10
2,00	1,00	0,69
1,75	1,20	0,56
1,50	1,40	0,41
1,25	1,60	0,22
1,10	1,80	0,10

Tabelle 1: Bestimmung der Zeitkonstante

Da nur die relative Amplitude interessant ist, wählen wir willkürlich  $U_0 = 1V$ . Durch lineare Regression der logarithmierten Werte erhalten wir die Zeitkonstante RC. Wir erhalten als Steigung den Wert  $a = -0,78 \pm 0,01[1/ms]$ . Somit ergibt sich die Zeitkonstante durch  $RC = -1/a = (1,29 \pm 0,02)$  [ms] (ohne Berücksichtigung des Innenwiderstands der Schaltung). Die erhaltenen Ergebnisse sind in Abbildung 5 veranschaulicht. Wenn man nur jedoch bedenkt, daß auch der Generator einen Innenwiderstand  $R_i = 600\Omega$  besitzt, und wir einen Gesamtwiderstand  $R_{ges} = 15k\Omega$  gemessen haben ergibt sich für die eigentliche Zeitkonstante der Kombination ( $R_m C$ ) der Wert

$$R_m C = R_{ges} \frac{R_{ges} C}{R_{ges} + R_i} = (1,28 \pm 0,02)[ms]$$

Der Fehler ist dabei gleich dem Fehler der Regression, da die Fehler der Widerstände nicht hinreichend bestimmt sind. Man erkennt, daß der Innenwiderstand kaum einen Einfluss auf das Ergebnis hat. Somit betrachten wir im folgenden wieder nur den Fall für eine "optimale" Messvorrichtung ohne inneren Widerstand.

## 4.2 Frequenzabhängigkeit der Amplitude

Wir haben die in Tabelle 2 aufgelisteten Werte gemessen.

Durch Regression ermittelten wir hier eine Zeitkonstante  $RC = (1,27 \pm 0,0479 \text{ [ms]})$ . Die Ergebnisse sind in Abbildung 6 veranschaulicht. Die Theoriewerte ergeben sich nach Gleichung 10. Man erkennt leichte Abweichungen der Messwerte von der theoretischen Kurve.

Zusätzlich bestimmen wir noch den Einfluss der Frequenz auf die Amplitude durch einen wobbelbaren Generator und angeschlossenen XY-Schreiber. Das erstellte Diagramm findet sich im Anhang. In Tabelle 3 sind einige Messwertepaare dargestellt.

$\nu[\text{Hz}]$	$U_C[\text{V}]$	$U_C, \text{theor.}$
10,12	2,29	2,43
20,00	2,21	2,37
49,98	1,92	2,07
100,01	1,49	1,51
150,17	1,15	1,14
200,54	0,94	0,89
250,40	0,78	0,73
300,41	0,66	0,62
400,98	0,50	0,47
500,70	0,41	0,38
700,70	0,30	0,27
1000,31	0,21	0,19
2000,00	0,11	0,10
3004,62	0,07	0,06
4007,29	0,05	0,05
5004,34	0,04	0,04

Tabelle 2: Frequenzabhängigkeit der Amplitude

$\nu [Hz]$	Abstand [cm]	$U_C [V]$
20	14,3	0,220
50	13,3	0,205
100	10,5	0,162
150	8,4	0,129
200	6,7	0,103
250	5,6	0,086
300	4,7	0,072
400	4,3	0,066
500	2,8	0,043
700	2,1	0,032
1000	1,4	0,022
2000	0,6	0,009
3000	0,3	0,005
4000	0,2	0,003
5000	0,1	0,002

Tabelle 3: Amplitudenmessung mit Wobblgenerator

### 4.3 Frequenzabhängigkeit der Phase

Wir bestimmten wie bei der Durchführung beschrieben die Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung mittels eines Oszilloskops. Die ermittelten Werte sind in Tabelle 4 enthalten. Die Messwerte sind zudem in Abbildung 6 dargestellt. Die theoretischen Phasenverschiebungen ergeben sich aus Gleichung 9. Zwar entstehen Abweichungen zwischen Theorie und Experiment, jedoch bewegen sich diese in Bereichen, die noch gut durch die relativ ungenaue Bestimmung der Abweichung durch das Oszillooskop zu erklären sind.

Abbildung 6 stellt die erhaltenen Ergebnisse noch einmal graphisch dar. Weiterhin stellt Abbildung 7 noch einmal die erhaltenen Messergebnisse in einem Polarkoordinatendiagramm dar. Die Theoretische Kurve ergibt sich dabei aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= \arctan(-\omega RC) \\ A(\omega) &= -\frac{\sin(\phi)}{\omega RC} U_0\end{aligned}$$

die umgestellt zu der Gleichung

$$\cos(\phi) = \frac{A(\omega)}{U = 0}$$

führt.

In dem Diagramm ist somit die relative Amplitude gegen den Cosinus der Phase aufgetragen.

### 4.4 Der RC-Kreis als Integrator

Wir gaben nacheinander verschiedene Spannungen (Rechteck-, Dreieck und Sinusspannung) auf den RC Kreis. Man erkennt auf dem Oszilloskop (vgl. auch Thermodrucke im Anhang), daß sie durch den RC-Kreis in Ihre jeweilige Stammfunktion integriert werden.

Aus der Rechteckspannung ( $y = a$ ) wird somit eine Funktion mit konstanter Steigung ( $y = a \cdot x + c$ ). Die Dreiecksspannung ( $y = a \cdot x$ ) wird zu einer Parabel ( $y = a \cdot x^2 + b$ ) und aus der Sinusspannung ergibt sich eine Cosinusfunktion.

$\nu$ [Hz]	Abstand[Käst.]	Time div [ms]	Zeitdiff.[ms]	Periodendauer[ms]	$\phi$ [rad]	$\phi_{theor.}$ [rad]
20,06	0,3	5	1,50	49,85	0,19	0,25
49,96	0,7	2	1,40	20,02	0,44	0,57
100,56	0,6	2	1,20	9,94	0,76	0,91
150,52	1,0	1	1,00	6,64	0,95	1,09
200,16	1,6	0,5	0,80	5,00	1,01	1,2
250,62	1,5	0,5	0,75	3,99	1,18	1,27
301,18	1,3	0,5	0,65	3,32	1,23	1,32
400,2	1,0	0,5	0,50	2,50	1,26	1,38
501,17	0,8	0,5	0,40	2,00	1,26	1,42
702,83	1,6	0,2	0,32	1,42	1,41	1,46
1000,3	1,1	0,2	0,22	1,00	1,38	1,49
1999,83	1,2	0,1	0,12	0,50	1,51	1,53
3002,19	1,6	0,05	0,08	0,33	1,51	1,54
4006,74	1,2	0,05	0,06	0,25	1,51	1,55
5003,64	0,9	0,05	0,05	0,20	1,41	1,56

Tabelle 4: Frequenzabhängigkeit der Phase

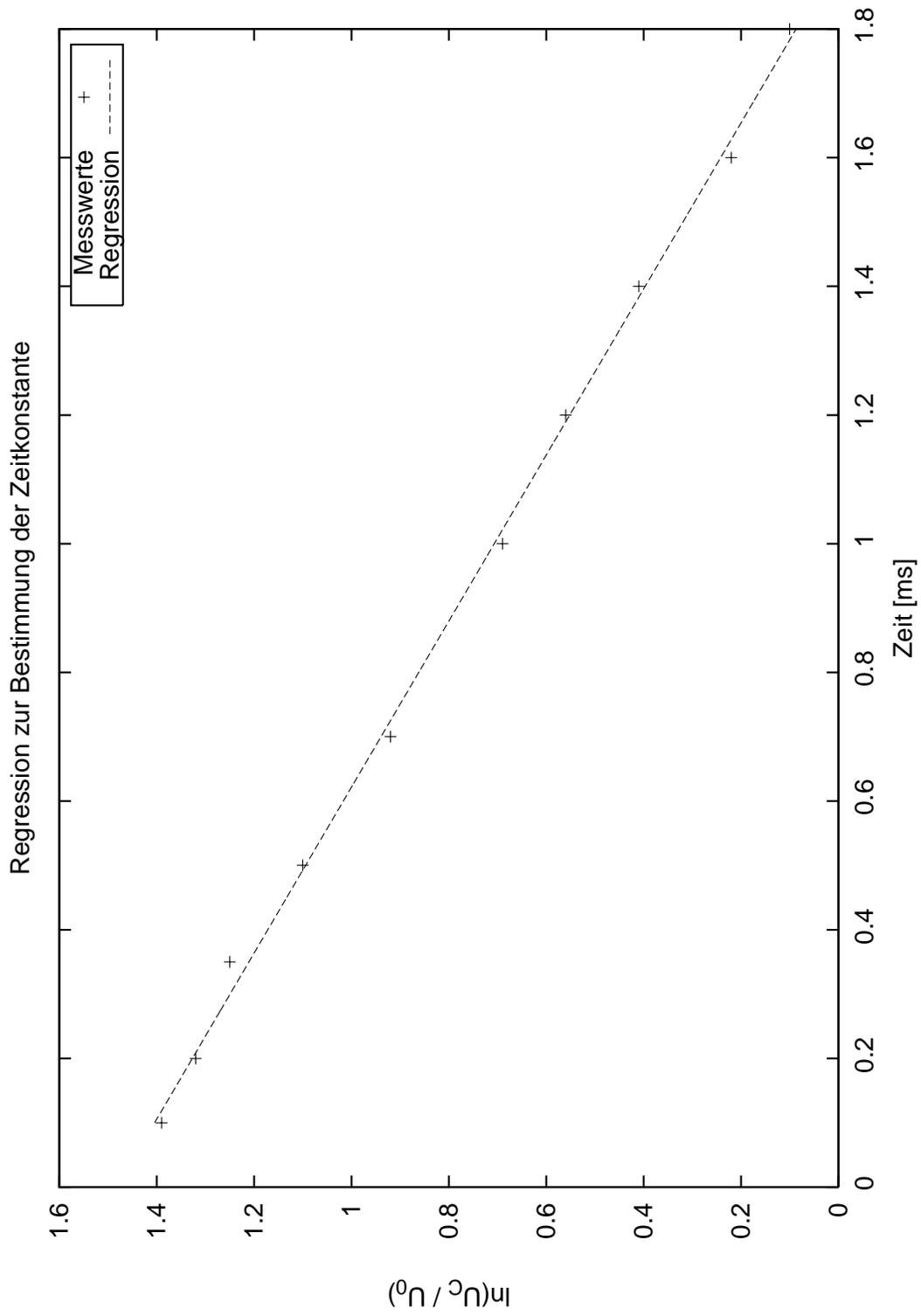


Abbildung 5: Zeitkonstante der RC-Kombination

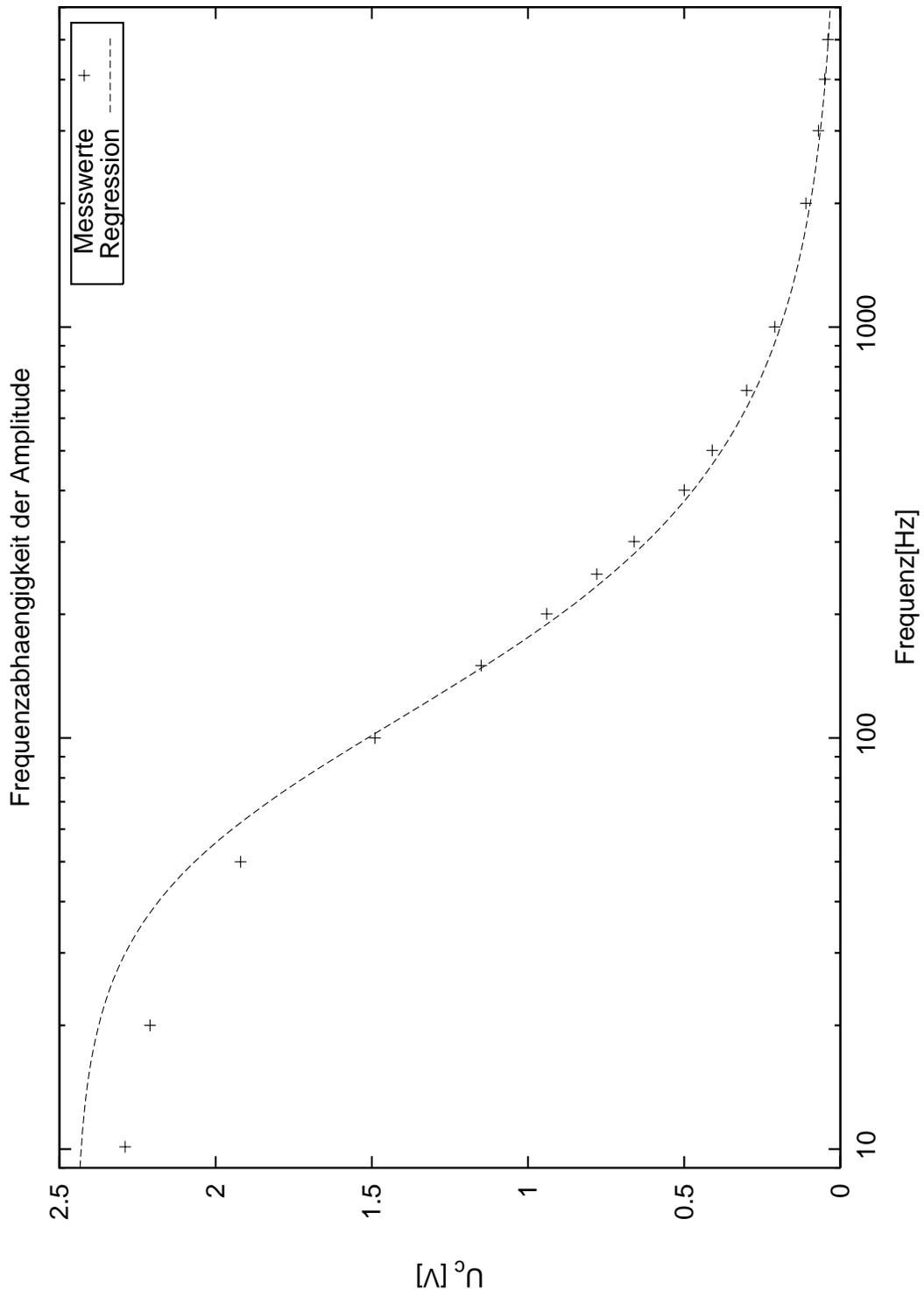


Abbildung 6: Frequenzabhängigkeit der Amplitude

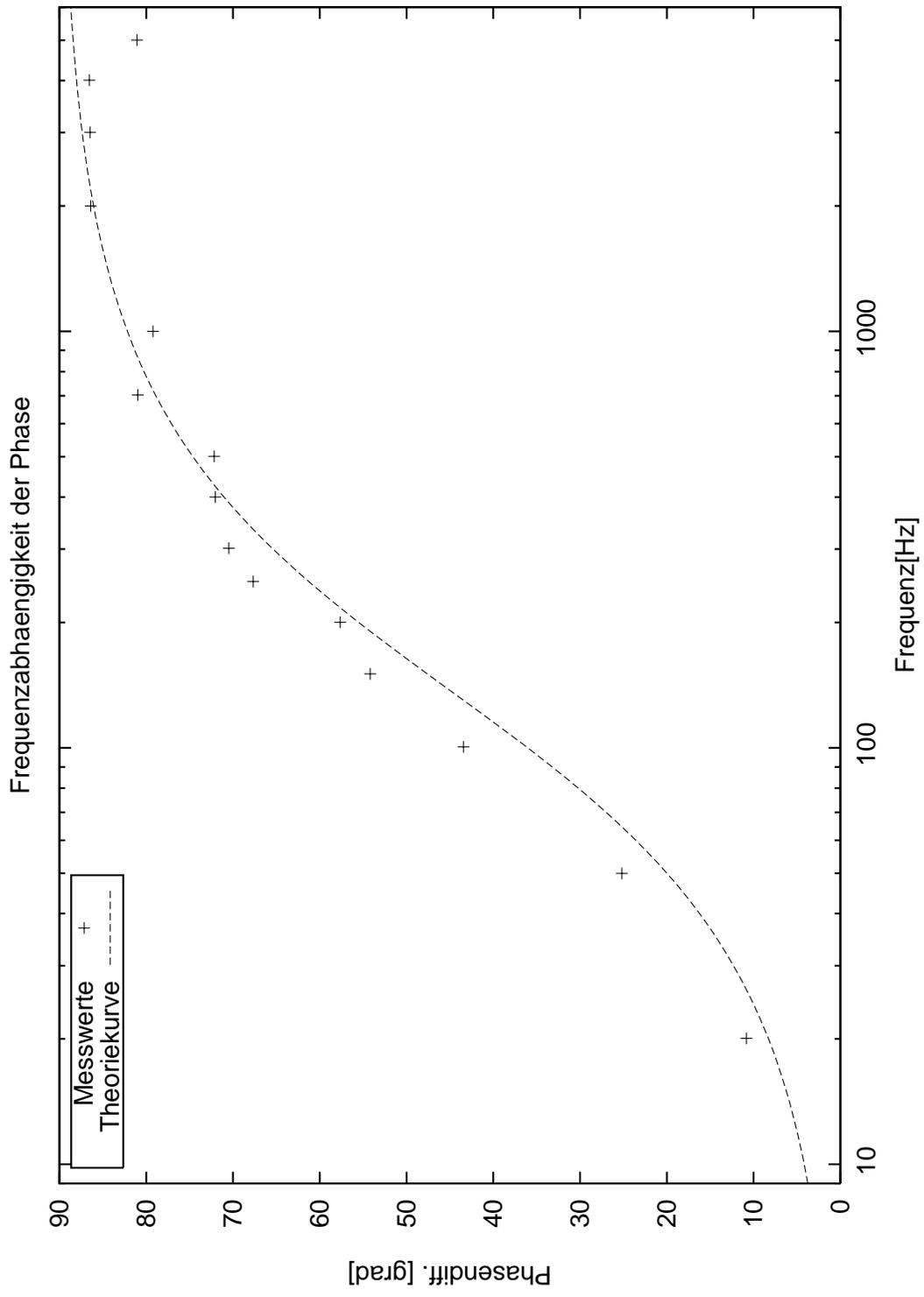


Abbildung 7: Frequenzabhängigkeit der Phase

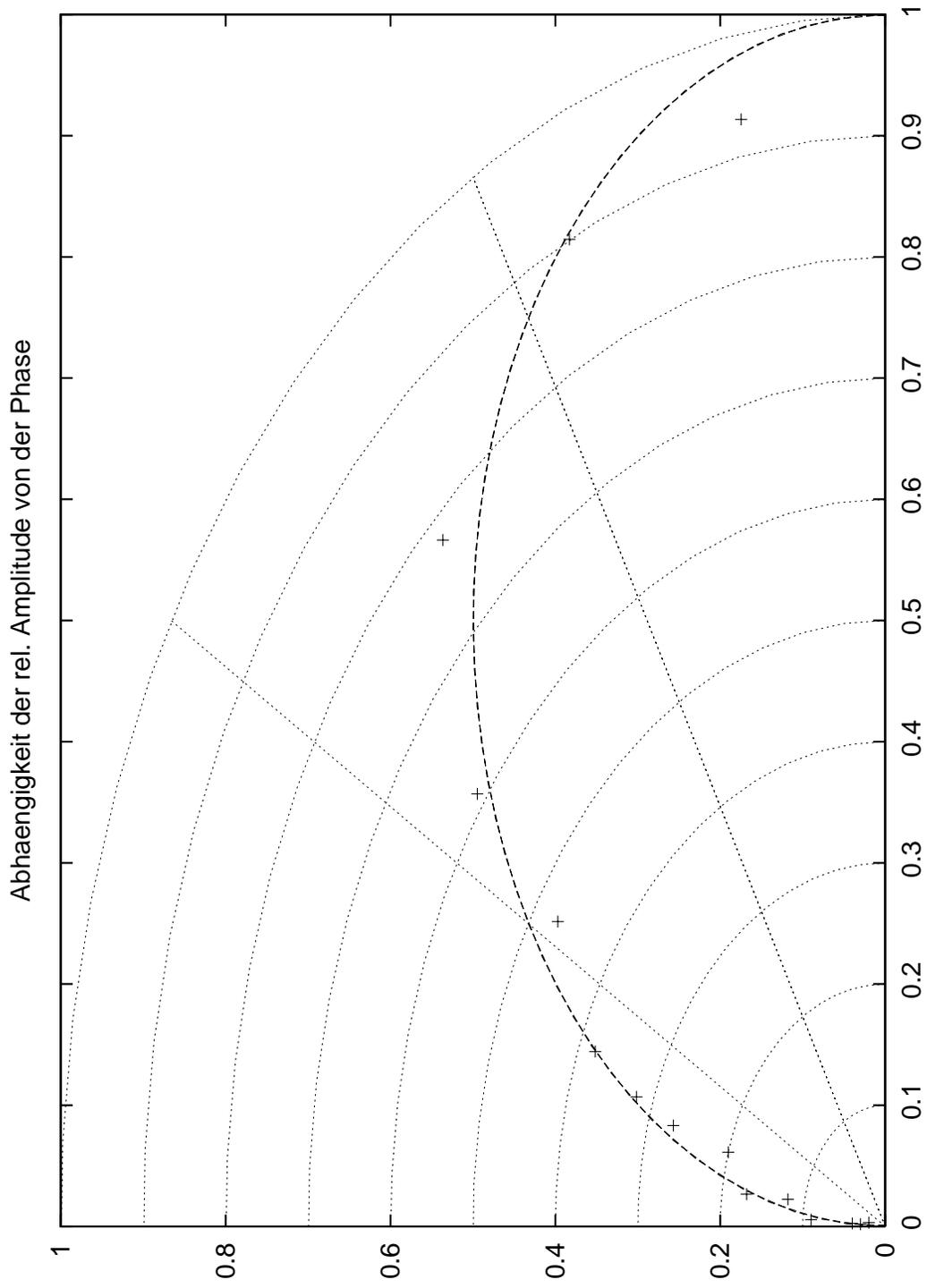


Abbildung 8: Polarkoordinatendiagramm der rel. Amplitude