

Physik III - Anfängerpraktikum- Versuch 355

Sebastian Rollke (103095) und Daniel Brenner (105292)

21. September 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Theorie	2
2.1	Die Resonanzfrequenz gekoppelter Schwingkreise	2
2.2	Strom in einem angeregten gekoppelten Schwingkreis	4
3	Durchführung	5
3.1	Abgleich der Resonanzfrequenzen	5
3.2	Beobachtung der Schwebungsvorgänge	5
3.3	Stromkurven bei Schwebungsvorgängen	5
4	Auswertung	8
4.1	Allgemeines zur Fehlerrechnung	8
4.2	Allgemeines zum Versuchsaufbau	8
4.3	Justierung und Bestimmung der Resonanzfrequenz	8
4.4	Bestimmung des Verhältnis zwischen Schwingungs- und Schwebungsfrequenz	9
4.5	Bestimmung der Fundamentalfrequenzen	10
4.6	Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Stöme	10
4.6.1	Die Generatorspannung U	10
4.6.2	Der Kondensatorstrom I_K	11
4.6.3	Der Strom des Schwingkreises I_2	11
4.7	Fehlerbetrachtung	11

1 Einleitung

Im folgenden Versuch werden gekoppelte Schwingungen am Beispiel zweier gleicher elektrischer Schwingkreise behandelt, die über einen Kondensator gekoppelt sind. Dabei beobachtet u.a. das Phänomen, daß die Energie periodisch zwischen den beiden Schwingkreisen wandert. Das gleiche beobachtet jedoch z.B. auch bei schwingfähigen Systemen z.B. zwei über eine Feder gekoppelten Pendeln.

2 Theorie

2.1 Die Resonanzfrequenz gekoppelter Schwingkreise

Betrachtet man die beiden elektrischen Schwingkreise, erhält man über die Kirchhoff'sche Knotenregel am Verzweigungspunkt A

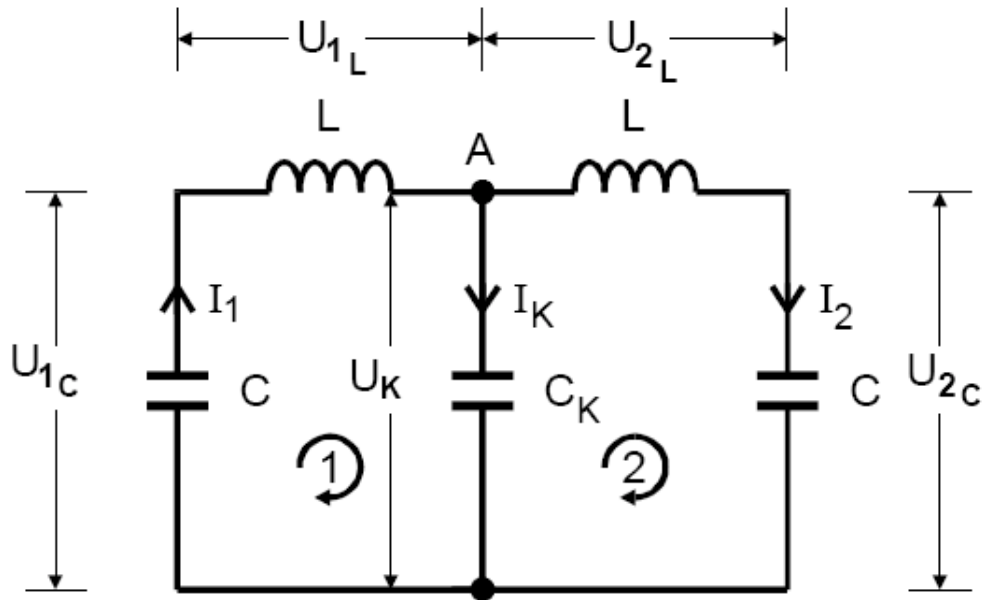


Abbildung 1: Gekoppelte Schwingkreise

$$I_k = I_1 - I_2 \quad (1)$$

Durch die Maschenregel erhält man

$$U_{1C} + U_{1L} + U_K = 0 \quad (2)$$

$$U_{2C} + U_{2L} + U_K = 0 \quad (3)$$

Durch einsetzen der Beziehungen für die Spannungen Kondensator und Spule sowie Differentiation nach der Zeit erhält man

$$L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C}I_1 + \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (4)$$

$$L\ddot{I}_2 + \frac{1}{C}I_2 + \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (5)$$

Man führt nun zwei neue Variablen I^+ und I^- für Summe bzw Differenz der Einzelströme ein. Somit ergeben sich die Gleichungen

$$L\ddot{I}^+ + \frac{1}{C}I^+ = 0 \quad (6)$$

$$L\ddot{I}^- + \frac{1}{C}I^- + \frac{1}{C_K}(I^-) = 0 \quad (7)$$

Man hat somit zwei unabhängig voneinander lösbare homogene Differentialgleichungen. Die erste Gleichung hat dabei die Form eines harmonischen Oszillators. Somit ergibt sich die Lösung zu

$$I^+(t) = (I_0^+) \cdot \cos(t/\sqrt{LC}) \quad (8)$$

mit der Schwingungsfrequenz

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (9)$$

, die der Schwingfrequenz eines einzelnen Oszillators mit der Kapazität C und der Induktivität L entspricht. Bemerkenswert ist die bemerkenswerte Tatsache, dass die Summe $I_1 + I_2$ der Ströme in den einzelnen Kreisen der gekoppelten Oszillatoren mit der konstanten Amplitude $I_{10} + I_{20}$ schwingt.

Das entsprechende gilt für die Differenz $I_1 - I_2$ der Ströme, wie die Lösung der zweiten DGL zeigt

$$I^-(t) = (I_0^+) \cdot \cos\left(t/\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}\right) \quad (10)$$

Hieraus resultiert dann wiederum die Eigenfrequenz

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}} \quad (11)$$

Spezialfälle Beginnt die Oszillation in beiden Schwingkreisen mit gleicher Phase und Amplitude, so schwingen beide Schwingkreise in Phase mit der Frequenz ν^+ . Es findet also auch kein Energieaustausch zwischen den Systemen statt.

Starten beide Schwingkreise genau gegenphasig (jedoch mit gleicher Amplitude) zueinander, schwingen beide mit der erhöhten Frequenz ν^- .

Diese beiden Vorgänge bezeichnet man als Fundamentalschwingungen des gekoppelten Systems. Regt man nur einen der beiden Schwingkreise zu einer Schwingung an, so kommt es zu einer Schwebung. Man beobachtet eine Schwingung mit ungefähr der Frequenz des Einzeloszillators, jedoch ändert sich die Amplitude periodisch zwischen den Extremwerten 0 und I_{10} mit der niedrigen Frequenz $\nu^+ - \nu^-$.

Somit pendelt auch die Energie zwischen den beiden Systemen hin und her.

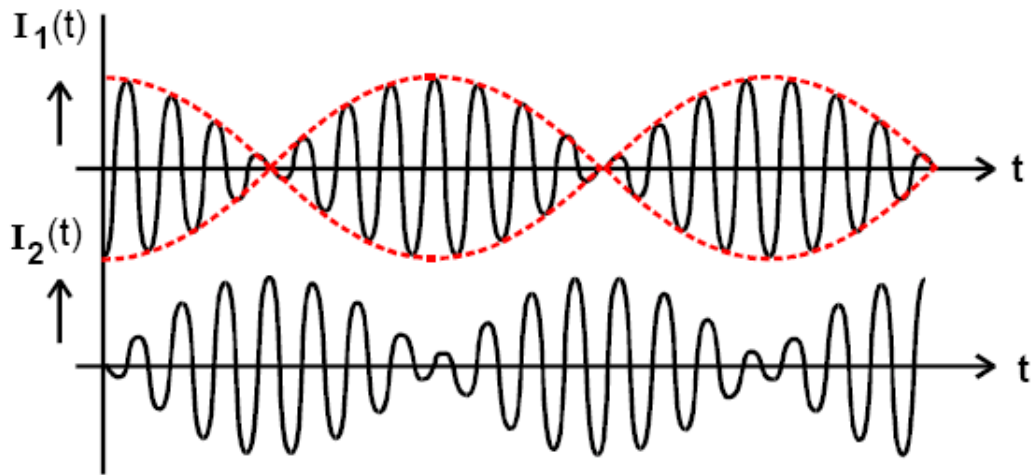


Abbildung 2: Schwebung

2.2 Strom in einem angeregten gekoppelten Schwingkreis

Einem gekoppelten Schwingkreis (siehe Abbildung) wird eine Frequenz aufgezwungen. Die ohmschen Verluste innerhalb des Schwingkreises werden jeweils durch die Widerstände R im Ersatzschaltbild repräsentiert. Durch die Kirch'offschen Gesetze erhält man dann den Ausdruck

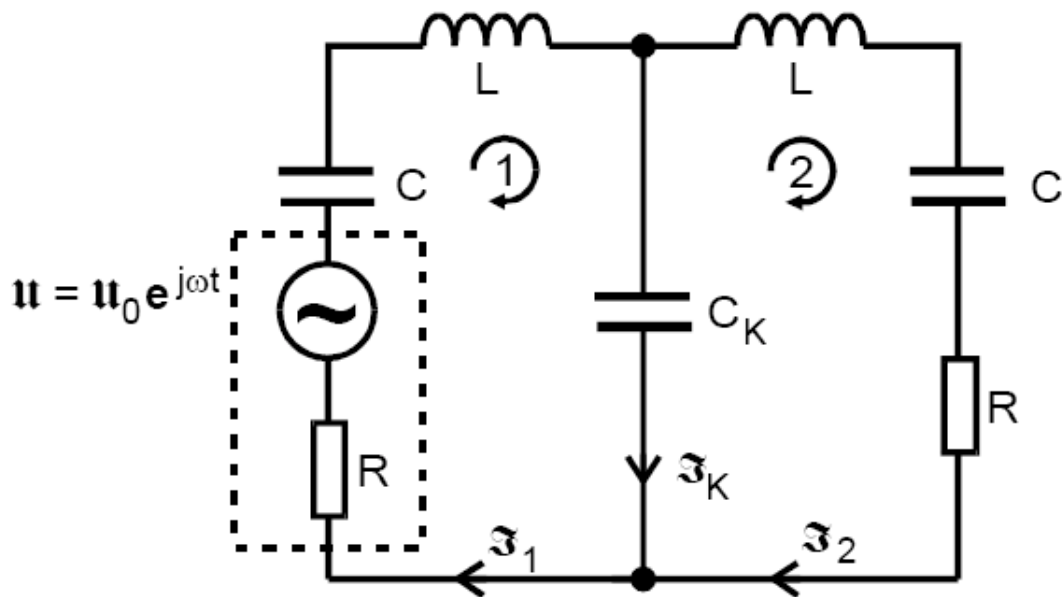


Abbildung 3: Angeregter gekoppelter Schwingkreis

$$|I_2| = |U| \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)\right)^2 + \omega R^2 C_K^2}} := |U| \cdot \Lambda \quad (12)$$

für den Betrag des Stroms I_2 . Hierbei ist Λ der Leitwert des Schwingkreises. an erkennt nun, daß für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ I_2 gegen 0 geht. Dazwischen liegen die beiden Fundamentalfrequenzen ω^+ und ω^- , bei denen der Leitwert ein Maximum erreicht. Setzt man nun die bereits bekannten Ausdrücke für die beiden Frequenzen ein, erhält man

$$|\Lambda|^+ = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}}} \quad (13)$$

und außerdem

$$|\Lambda|^- = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC} \left(1 + \frac{C}{C_K}\right)}} \quad (14)$$

Die Stromkurve erreicht bei den beiden Fundamentalfrequenzen jeweils ein Maximum, die sich jedoch nur sehr geringfügig unterscheiden. Man kann dabei die beide Schwingkreise als einen Schwingkreis mit der doppelten Induktivität aber der halben Kapazität auffassen, der entsprechend allerdings immer noch die gleiche Resonanzfrequenz besitzt.

3 Durchführung

Es wurde die Schaltung 2 vermessen.

3.1 Abgleich der Resonanzfrequenzen

Verwendet wurde der folgende Versuchsaufbau /vgl. Abbildung 4) zum Abgleich der Resonanzfrequenzen der beiden Schwingkreise.

Zunächst bestimmten wir die Resonanzfrequenz des ersten (fest abgestimmten) Schwingkreises indem wir das Strommaximum suchten und danach als Feinjustierung die Lissajous-Figuren verwendeten (sobald diese zu einer Geraden entartet findet Resonanz statt).

Als nächstes hielten wir diese Frequenz fest und regelten dann den zweiten Schwingkreis (mittels einer Regelkapazität) so ein, daß er die gleiche Resonanzfrequenz wie der erste hatte.

3.2 Beobachtung der Schwebungsvorgänge

Um die Schwebungsvorgänge bei gekoppelten Schwingkreisen zu beobachten verwendeten wir den in Abbildung 5 dargestellten Aufbau. Am Oszilloskop lässt sich dann die Schwebung beobachten und die Zahl der Maxima pro Schwebungsdauer bestimmen.

3.3 Stromkurven bei Schwebungsvorgängen

Man beobachtet weiterhin die Ströme $I_K(\nu)$ und $I_2(\nu)$ innerhalb der Schaltung, hierzu verwendet man zweckmäßigerweise einen Wobblgenerator, der ein voreingestelltes Frequenzspektrum

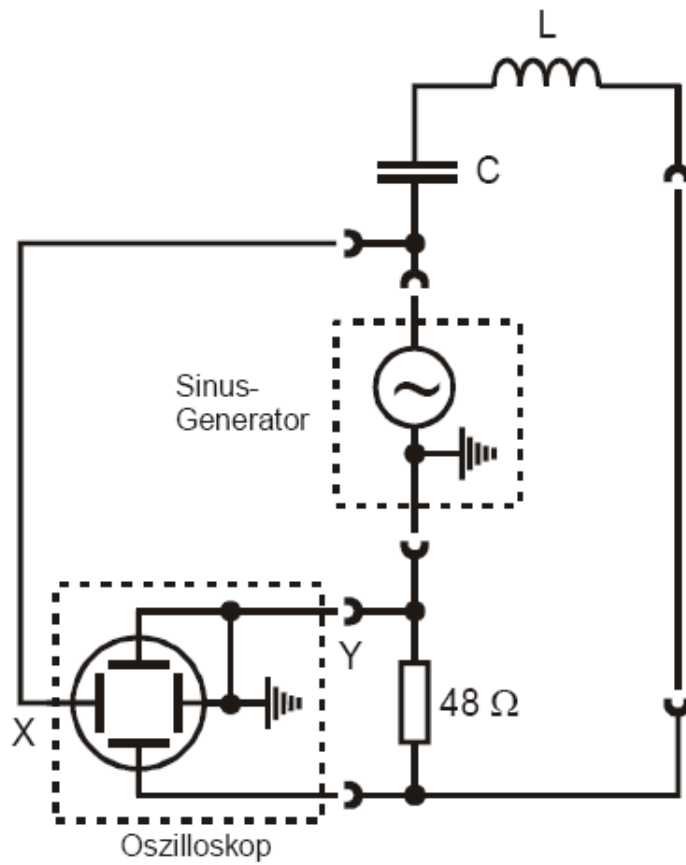


Abbildung 4: Aufbau zur Bestimmung der Resonanzfrequenz

automatisch durchfährt. Die Kurven werden durch einen angeschlossenen XY-Schreiber aufgezeichnet. Die erhaltenen Kurven sind im Anhang zu finden. Die verwendete Schaltung ist in Abbildung 6 dargestellt.

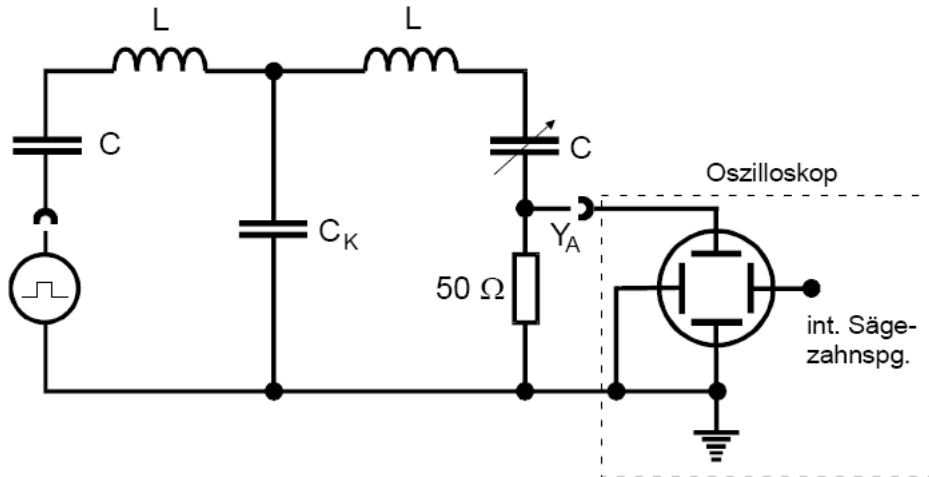


Abbildung 5: Aufbau zur Beobachtung der Schwebungsvorgänge

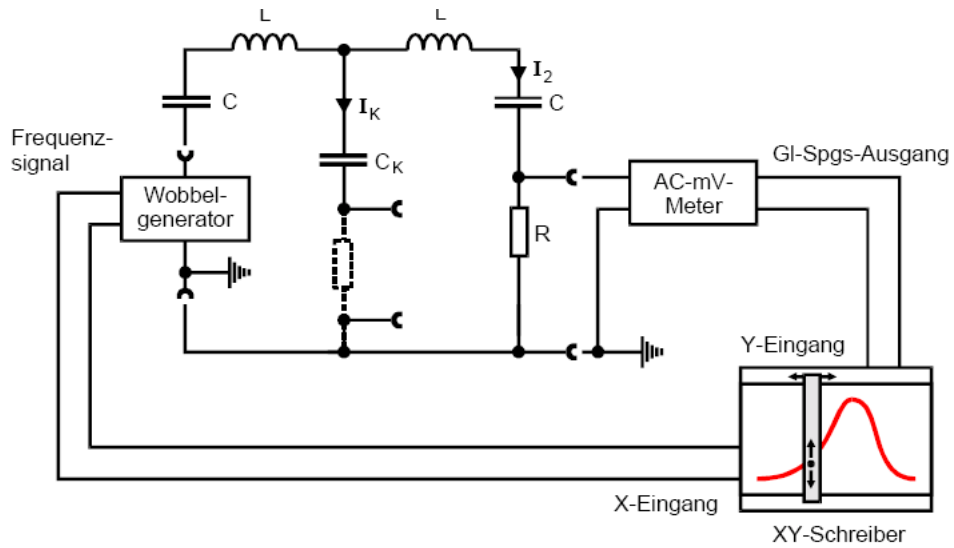


Abbildung 6: Aufbau zur Messung der Stromkurven

4 Auswertung

4.1 Allgemeines zur Fehlerrechnung

Im folgenden werden häufig diese drei Formeln genutzt, um das Protokoll nicht unnötig zu strecken geben wir sie hier einmal an und verweisen in Folge darauf:

Für den Mittelwert gilt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

Für den absoluten Fehler gilt:

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Für den relativen Fehler gilt:

$$s_{\bar{x},rel} = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}}$$

4.2 Allgemeines zum Versuchsaufbau

Zur Messung mit der Schaltung 2 wurden die folgenden Eigenschaften der Bauteile angegeben:

Für die Kapazität des Regelkondensators $C = (787 \pm 2)$ pF, für die Ersatzkapazität der Spule $C_{sp} = (28 \pm 1)$ pF und für die Induktivität der Spule $L = 23,60 \pm 0,05$ mH.

4.3 Justierung und Bestimmung der Resonanzfrequenz

Der theoretische Wert der gesuchten Resonanzfrequenz ist gegeben durch $\nu_{theo} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Jedoch muss berücksichtigt werden, dass in diesem Stromkreis bedingt durch die Spule eine weitere Ersatzkapazität hinzu kommt. Es gilt also für die Gesamtkapazität: $C_{ges} = C + C_{sp}$. Daraus folgt nun für den theoretischen Wert:

$$\nu_{theo} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_{sp})}} = (36,29 \pm 0,06) kHz$$

Der Fehler folgt aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung mit:

$$s_{theo} = \nu_{theo} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{s_L}{L}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{s_C^2 + s_{sp}^2}}{C + C_{sp}}\right)^2}$$

Der wie weiter oben beschrieben gemessene Wert lag bei 36,19 kHz. Diese geringe Abweichung lässt sich noch auf vorhandene Widerstände in den Kabeln zurückführen.

4.4 Bestimmung des Verhältnis zwischen Schwingungs- und Schwebungsfrequenz

Zur bestimmung des Verhältnisses wurden bei verschiedenen Koppelkondensatoren C_K die Verhältnisse zwischen den Maxima der Schwingung und der Schwebung ausgezählt. Dieses Verhältnis entspricht direkt dem gesuchten Verhältnis:

$$\frac{n_{schwing}}{n_{schweb}} = \frac{\nu_{schwing}}{\nu_{schweb}}$$

als Fehler nimmt man aufgrund der geringen Ausprägung der Wellen einen Ablesefehler von ± 1 an.

C_K [nF]	2,19	2,86	4,74	6,86	8,18	9,99	12,00
$n_{schwing}$	27 ± 1	26 ± 1	24 ± 1	23 ± 1	23 ± 1	22 ± 1	22 ± 1
n_{schweb}	6	5	3	2	2	2	1
$\frac{\nu_{schwing}}{\nu_{schweb}}$	4,5	5,2	8	11,5	11,5	11	22
$8 \frac{\nu_{schwing}}{\nu_{schweb}}$	0,17	0,2	0,33	0,5	0,5	0,5	1

Zum Vergleich werden nun die theoretischen Werte hinzu gezogen. Die beiden Fundamentalfrequenzen berechnen sich nach:

$$\nu_{theorie}^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_{sp})}} = (36,29 \pm 0,06)kHz$$

und

$$\nu_{theorie}^- = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K}\right)}$$

Da in beiden Schwingkreisen die gleichen Werte der Toleranz angegeben sind wie für den Koppelkondensator, kann man mit ausreichender Genauigkeit den relativen Fehler der beiden Fundamentalfrequenzen gleichsetzen. Damit ist

$$s_{\nu}^+ = s_{\nu}^- = s_{theo} = 0,2\%$$

Zur Berechnung der theoretischen Werte des gesuchten Verhältnisses nutzt man den Zusammenhang:

$$\left(\frac{\nu_{schwing}}{\nu_{schweb}}\right)_{theorie} = \frac{\nu_{theorie}^+ + \nu_{theorie}^-}{\nu_{theorie}^- - \nu_{theorie}^+}$$

Aus der Messung und den theoretischen Werten folgt nun diese Tabelle:

C_K [nF]	$\nu_{theorie}^-$ [kHz]	$\left(\frac{\nu_{schwing}}{\nu_{schweb}}\right)_{theorie}$	$\frac{\nu_{schwing}}{\nu_{schweb}}$	Abweichung
2,19	$48,41 \pm 0,10$	$6,99 \pm 0,06$	$4,5 \pm 0,17$	36%
2,86	$45,98 \pm 0,09$	$8,49 \pm 0,09$	$5,2 \pm 0,2$	39%
4,74	$42,62 \pm 0,09$	$12,46 \pm 0,20$	$8 \pm 0,33$	36%
6,86	$40,95 \pm 0,08$	$16,58 \pm 0,36$	$11,5 \pm 0,5$	31%
8,18	$40,33 \pm 0,08$	$18,98 \pm 0,47$	$11,5 \pm 0,5$	39%
9,99	$39,73 \pm 0,08$	$22,08 \pm 0,63$	$11 \pm 0,5$	50%
12,00	$39,28 \pm 0,08$	$25,30 \pm 0,83$	22 ± 1	13%

Leicht ersichtlich sind relativ hohe prozentuale Abweichungen von bis zu 50%. Dies lässt auf einen systematischen Fehler schließen, welcher sich leider bei der Messung selbst durch eine zweite Messung nicht finden ließ, sondern identische Werte ergab, was zum Abbruch der Messung führte.

4.5 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen

Die gemessenen Fundamentalfrequenzen werden hier im Folgenden mit den bereits errechneten theoretischen Werten verglichen:

C_K [nF]	$\nu_{theorie}^-$ [kHz]	ν_{exper}^- [kHz]	$\nu_{theorie}^+$ [kHz]	ν_{exper}^+ [kHz]
2,19	$48,41 \pm 0,10$	46,81	$36,29 \pm 0,06$	36,19
2,86	$45,98 \pm 0,09$	44,59	$36,29 \pm 0,06$	36,19
4,74	$42,62 \pm 0,09$	41,48	$36,29 \pm 0,06$	36,19
6,86	$40,95 \pm 0,08$	39,91	$36,29 \pm 0,06$	36,19
8,18	$40,33 \pm 0,08$	39,33	$36,29 \pm 0,06$	36,19
9,99	$39,73 \pm 0,08$	38,77	$36,29 \pm 0,06$	36,19
12,00	$39,28 \pm 0,08$	38,33	$36,29 \pm 0,06$	36,19

Zum bestimmen der Frequenzen lässt sich leider kein genauer Ablesefehler angeben, da die Entartung der Lissajous-Figur nicht exakt bestimmbar ist. Außerdem sieht man schnell, dass alle gemessenen Werte leicht unterhalb der theoretischen Werte liegen, was auf einen systematischen, viel gravierender wirkenden Fehler schließen lässt.

4.6 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Stöme

Zuerst wird die Achsenkalibrierung bestimmt, welche sich recht einfach durch das Teilen der "Werte-Differenz" durch die "Weg-Differenz" errechnen lässt. Alle Graphen wurden mit einer Koppelkapazität von 2,86 nF aufgenommen.

4.6.1 Die Generatorspannung U

Für die Achsen gilt:

$$x - Achse : \frac{52,40 - 29,03 \text{ kHz}}{24,00 \text{ cm}} \approx 1,0 \frac{\text{kHz}}{\text{cm}} \quad y - Achse : \frac{0,8 \text{ V}}{15,0 \text{ cm}} \approx 0,05 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

Wir nehmen jeweils einen Ablesefehler von 0,1 cm an, woraus absolute Fehler von $s_x = 0,1$ kHz und $s_y = 0,01$ V folgen.

Aus der aufgenommenen Kurve, welche bis auf zwei Minima nahezu konstant den Wert 0,8 V besitzt, folgen direkt für die beiden Minima bei $\nu^+ = (29,77 \pm 0,1)$ kHz entspricht die Spannung $(0,52 \pm 0,01)$ V und bei $\nu^- = (45,43 \pm 0,1)$ kHz hat die Spannung den Wert $(0,65 \pm 0,01)$ V. Vergleicht man diese Werte nun mit der Theorie, so sieht man leicht, dass beide Minima nach links verschoben sind. Bei der Frequenz ν_- weicht die Position des Minimums sogar nur um wenige Herz von der Fehlertoleranz ab. Zudem müsste theoretisch die Ausprägung beider Minima identisch sein, doch auch hier weichen sie um einiges voneinander ab. Dies lässt sich durch die zusätzliche Kapazität der Spule erklären, die in der Theorie den Wert null hat.

4.6.2 Der Kondensatorstrom I_K

Für die Achsen gilt hier:

$$x - \text{Achse} : \frac{52,80 - 35,62 \text{kHz}}{24,20 \text{cm}} \approx 0,7 \frac{\text{kHz}}{\text{cm}} y - \text{Achse} : \frac{0,61 \text{I}}{18,30 \text{cm}} \approx 0,03 \frac{\text{I}}{\text{cm}}$$

Wir nehmen jeweils einen Ablesefehler von 0,1 cm an, woraus absolute Fehler von $s_x = 0,07$ kHz und $s_y = 0,003$ I folgen.

Dieser Graph hat ein ausgeprägtes Maximum bei $\nu^- = (44,65 \pm 0,07)$ kHz und entspricht dort einer Spannung von $I_K = (0,61 \pm 0,003)$ A. Auch hier ist das Maximum lediglich um einen kleinen Wert von etwa 1,3 kHz nach links verschoben.

4.6.3 Der Strom des Schwingkreises I_2

Für die Achsen gilt hier:

$$x - \text{Achse} : \frac{48,10 - 27,80 \text{kHz}}{24,5 \text{cm}} \approx 0,5 \frac{\text{kHz}}{\text{cm}} y - \text{Achse} : \frac{0,49 \text{I}}{15,80 \text{cm}} \approx 0,03 \frac{\text{I}}{\text{cm}}$$

Wir nehmen jeweils einen Ablesefehler von 0,1 cm an, woraus absolute Fehler von $s_x = 0,05$ kHz und $s_y = 0,003$ I folgen.

Diese Stromverlaufskurve besitzt schließlich wieder zwei Maxima an den Stellen $\nu^+ = (32,85 \pm 0,05)$ kHz mit $I_2 = (0,49 \pm 0,003)$ A und bei $\nu^- = (37,95 \pm 0,05)$ kHz mit $I_2 = (0,43 \pm 0,003)$ A. Auch hier lässt sich wieder eine erhebliche Verschiebung der erwarteten Maxima nach links feststellen.

4.7 Fehlerbetrachtung

Bei den Aufgenommenen Kurven lässt sich insgesamt eine verschieden stark ausgeprägte aber konstant vorhandene Verschiebung entlang der x-Achse feststellen, was wiederum auf einen systematischen Fehler bei der Messung schließen lässt. Alle Messungen zeigten systematische, teils sehr gravierende Fehler bei der Messung, was leider die Ergebnisse in ihren Werten sehr variieren ließ und so verfälschte.