

Physik Anfängerpraktikum - Versuch 408
Geometrische Optik

Sebastian Rollke (103095)
webmaster@rollke.com

und

Daniel Brenner (105292)
daniel.brenner@uni-dortmund.de

durchgeführt am 14. Juni 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Theorie	3
2.1	Verhalten von Lichtstrahlen an Grenzflächen - Brechung	3
2.2	Die Linsenformeln	4
2.2.1	Abbildungsfehler - Dicke Linsen	4
2.3	Die Matrixoptik	5
2.3.1	Voraussetzungen	5
2.3.2	Grundlagen	5
2.3.3	Translation	5
2.3.4	Refraktion an einer Grenzfläche	6
2.3.5	Refraktion an einer dünnen Linse	7
2.3.6	Abbildungsmatrix für eine dünne Linse	7
2.3.7	Abbildungsmatrix für ein zwei-Linsen-System	7
2.3.8	Bildkonstruktion am Zwei-Linsen-System und Begriff der Hauptebenen	8
2.3.9	Eigenschaften der Matrixoptik	8
3	Experimentelles Vorgehen	10
3.1	Zielsetzung	10
3.2	Bestimmung des Krümmungsradius r nach der Methode von Kohlrausch	10
3.3	Bestimmung der Brennweite nach dem Verfahren von Bessel	11
3.4	Bestimmung der Brennweite nach dem Autokollimationsverfahren	11
3.5	Bestimmung der Hauptebenen nach Abbe	12
4	Auswertung	13
4.1	Allgemeines zur Fehlerrechnung	13
4.2	Bestimmung des Krümmungsradius r nach der Methode von Kohlrausch	13
4.3	Bestimmung der Brennweite mit der Methode nach Bessel	14
4.4	Bestimmung der Brennweite nach dem Autokollimationsverfahren	16
4.5	Berechnung des Brechungsindex des in der Linse verarbeiteten Glases	16
4.6	Bestimmung der Hauptebenen nach Abbe	17
4.6.1	1. Linsensystem	19
4.6.2	2. Linsensystem	19

Kapitel 1

Einleitung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten das Verhalten des Lichts zu erklären

- Die Beschreibung des Lichtes durch sich geradlinig ausbreitende Strahlen (\rightarrow *geometrische Optik*).
- Die Beschreibung des Lichtes als elektromagnetische Welle (*Wellenbeschreibung des Lichtes*).
- Die Beschreibung des Lichtes als Teilchen (*Photonen*) mit gequantelter Energie (*Teilchenmodell des Lichtes*).

Die Betrachtungsweisen sind dabei keineswegs unabhängig voneinander. So folgt auch die geometrische Optik aus der Wellenoptik, wenn man die Lichtstrahlen als Normalen auf der Einhüllenden der Wellen auffasst.

Auch kann das Licht nicht nur als Welle oder Teilchen beschrieben werden, da manche Phänomene nur durch eine der Theorien beschrieben werden können (*Welle-Teilchen-Dualismus*). Die geometrische Optik ist dabei die "einfachste" Erklärungsweise, dabei allerdings z.B. nicht in der Lage u.a. Beugungsphänomene zu erklären. Jedoch leistet sie sehr gute Dienste, da sich mit ihr optische Systeme (wichtigstes Bauelement ist hierbei die **Linse**) sehr gut und elegant beschreiben lassen. Besonders elegant lässt sich dies mit der *Matrixoptik* beschreiben. Diese beschreibt Lichtstrahlen als Vektoren und überführt Lichtstrahlen vor- und nach optischen Elementen mittels Transformationsmatrizen in ihren neuen Zustand.

Im folgenden Versuch werden nun die geometrische Optik und ihre wichtigsten Bauelemente, die Linsen, behandelt.

Kapitel 2

Theorie

2.1 Verhalten von Lichtstrahlen an Grenzflächen - Brechung

Am Übergang zweier Medien mit unterschiedlichen Grenzflächen kommt es zur *Brechung* der Lichtstrahlen. Bedingt durch die unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten in den Medien, ändert sich die Richtung des Lichtstrahls (vgl. Abb. 2.1). Hierbei gilt das *Snellius'sche Brechungsgesetz*

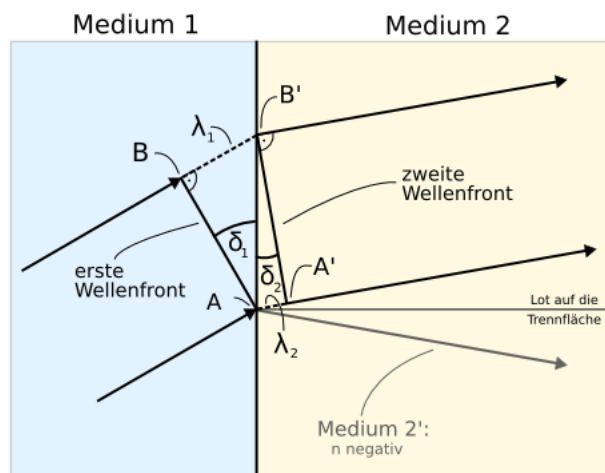


Abbildung 2.1: Snellius'sches Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\delta_1)}{\sin(\delta_2)} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.1)$$

in dem δ_1 und δ_2 die Winkel zur Grenzfläche bezeichnen (vgl. Abb. 2.1.), c_1 und c_2 die Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien und n_1 und n_2 ihre Brechungsindizes.

Dies bildet nun die Grundlage für das Verhalten von Licht an Linsen. Bedingt durch die Form

der Linse und die Richtung der eintreffenden Lichtstrahlen wird das Licht entweder zu einem *Brennpunkt* f hingebrochen, gestreut (vgl. Abb. 2.2) oder in parallele Strahlen gewandelt. Dabei

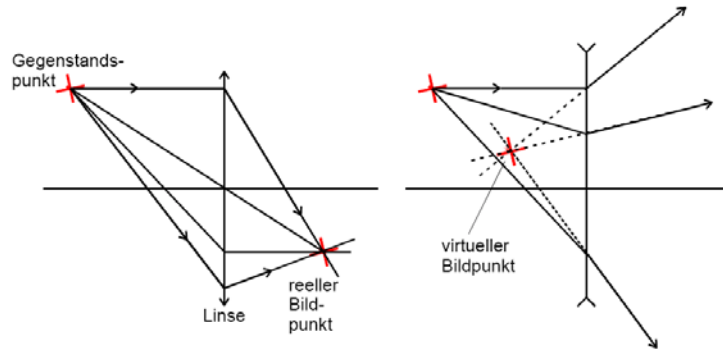


Abbildung 2.2: Brechung an einer Linse - Entstehung reeller und virtueller Bilder

entstehen je nachdem, ob sich die (verlängerten) Strahlen vor oder hinter der Linse treffen, reelle oder virtuelle Bilder. Nur reelle Bilder können dabei auf z.B. einem Schirm sichtbar gemacht werden im Gegensatz zu virtuellen (z.B. Spiegelbildern).

2.2 Die Linsenformeln

Gewisse wichtige Eigenschaften von Linsen lassen sich durch zwei einfache Gleichungen wiedergeben. Charakteristisch für eine Linse ist ihre Brennweite, die wiederum durch die Krümmungsradien ihrer Oberfläche bestimmt wird.

Im folgenden bezeichnet f die Brennweite einer Linse, g die Gegenstandsweite (Abstand Linse-Gegenstand), G die Größe des Gegenstands, b die Bildweite (Abstand Linse-Bild) und B die Bildgröße.

Nun erhält man eine scharfe Abbildung eines Gegenstandes durch die Linse wenn gilt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}, \quad (2.2)$$

dabei sind dann Abstände und Größen von Gegenstand und Abbildung folgendermaßen verknüpft

$$\frac{G}{B} = -\frac{b}{g}. \quad (2.3)$$

Man erkennt direkt, dass eine Linse zum Beispiel zum Vergrößern (Lupe) verwendet werden kann.

2.2.1 Abbildungsfehler - Dicke Linsen

Die oben dargestellten Gleichungen sind dabei deutlich idealisiert. Man geht u.a. davon aus, daß die Linsen sehr dünn sind. In der Realität treten jedoch durch die endliche Dicke der Linsen und die unterschiedliche Entfernung der Strahlen vom Mittelpunkt der Linse sogenannte Abbildungsfehler oder auch *Sphärische Aberrationen* auf.

2.3 Die Matrixoptik

Die Matrixoptik bietet wie bereits erwähnt einen eleganten Formalismus zur Beschreibung optischer Systeme. Sie kann jedoch nur unter gewissen Voraussetzungen benutzt werden.

Im folgenden wird der Begriff *optische Achse* verwendet. Bei einem Aufbau optischer Elemente verwendet man diesen Begriff für die Achse, um den der gesamte Aufbau rotationssymmetrisch ist.

2.3.1 Voraussetzungen

Die Matrixoptik kann nur angewendet werden wenn

- eine optische Achse existiert
- man nur Strahlen betrachtet die wenig von der optischen Achse entfernt sind (*achsennahe Strahlen*)
- der Winkel des Lichtstrahls zur optischen Achse klein ist, so dass gilt $\sin(\alpha) \approx \alpha$.

2.3.2 Grundlagen

Die Matrixoptik beschreibt einen Lichtstrahl an einer Position durch einen Vektor

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

y stellt dabei die Entfernung des Strahls zur optischen Achse und α den Winkel zwischen optischer Achse und Strahl dar.

Die Überführung von einem Lichtstrahl in einem Punkt 1 zu einem Strahl in einem Punkt 2 erfolgt dabei durch Multiplikation des Strahlenvektors 1 mit einer oder mehreren Matrizen \mathbf{M} . Die Form der Matrizen hängt dabei von den Gegebenheiten des Systems ab.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} . \quad (2.5)$$

Wir werden im folgenden die Form der Matrizen für die Ausbreitung des Lichtes im homogenen Medium und die Brechung an einer Grenzfläche zeigen.

Bei den folgenden Matrizen verwenden wir die nun dargestellten Bezeichnungen für die einzelnen Elemente

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \quad (2.6)$$

2.3.3 Translation

Im homogenen Medium breitet sich das Licht gemäß Abb. 2.3 aus. Dadurch ergibt sich die Form der Translationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Woraus sich dann die Transformation zweier Strahlen ineinander ergibt durch

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 + s\alpha \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

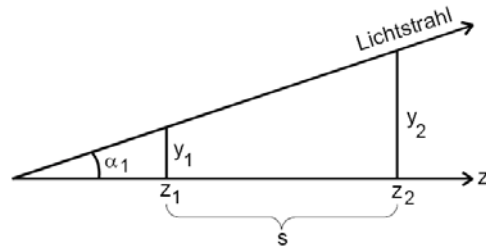


Abbildung 2.3: Translation eines Lichtstrahls im homogenen Medium

2.3.4 Refraktion an einer Grenzfläche

Trifft das Licht auf eine Grenzfläche zweier Medien mit verschiedenen Brechungsindizes, so beschreibt es eine Richtungsänderung (vgl. Kapitel 2.1). Dies wird nun in der Matrixoptik durch sogenannte *Refraktionsmatrizen* dargestellt. Wir verzichten hierbei auf eine genaue Analyse der Brechung an geraden Grenzflächen sondern betrachten die für diesen Versuch relevante Brechung an sphärischen Grenzflächen (z.B. einer Linsenoberfläche), wie sie in Abbildung 2.4 dargestellt ist. Durch Anwendung des *Snellius'schen Brechungsgesetzes*

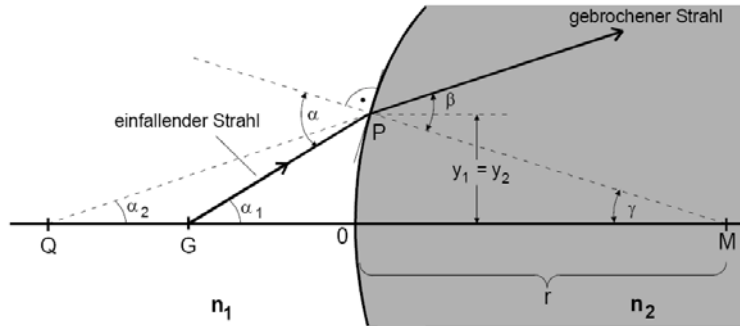


Abbildung 2.4: Brechung eines Lichtstrahls an einer gekrümmten Oberfläche

(vgl. Kapitel 2.1) erhalten wir dann als Refraktionsmatrix für eine gekrümmte Oberfläche

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{r} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 und dem Krümmungsradius der Oberfläche r . Dabei bezeichnet man $\frac{n_1 - n_2}{r}$ als Brechkraft P . Dabei ist P gerade die reziproke Brennweite. Entsprechend lassen sich zwei Strahlen über nachfolgende Gleichung ineinander überführen. Die zusätzlichen Faktoren n_1 und n_2 ergeben sich durch die unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten in den Medien.

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \alpha_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{r} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

2.3.5 Refraktion an einer dünnen Linse

Mit Translation und Refraktion lässt sich nun das Verhalten des Lichtes an einer Linse beschreiben. Diese bestehe dabei aus zwei sphärischen Oberflächen mit den Krümmungsradien r_1 und r_2 . Konvexe Krümmung wird beschrieben durch positive, konkave durch negative Radien (vgl. Abb. 2.5), jeweils gemessen von der Seite des ausfallenden Strahls. Entsprechend ist in der Abbildung

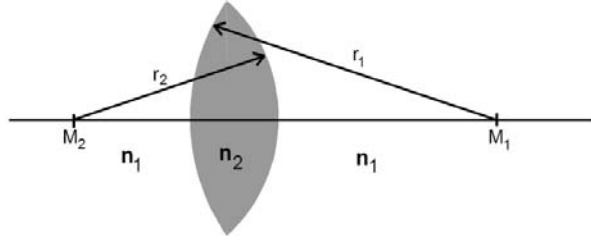


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung einer Linse

r_2 positiv und r_1 negativ.

Die Distanz zwischen den beiden Oberflächen kann man vernachlässigen. Dementsprechend gilt die Transformation

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} . \quad (2.11)$$

Die Multiplikation der beiden Refraktionsmatrizen ergibt dann die Gesamtmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.12)$$

Das Element C ist nun wiederum die Brechkraft bzw. reziproke Brennweite der Linse. Entsprechend lässt sich die Matrix leichter als

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

schreiben.

2.3.6 Abbildungsmatrix für eine dünne Linse

Ausgehend von den vorherigen Betrachtungen lässt sich der Strahlengang an einer Linse (vgl. Abb. 2.6) beschreiben durch

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{f} & g + b - \frac{gb}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{g}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Somit ist die Konstruktion eines Bildes möglich, da das genaue Verhalten der Lichtstrahlen bekannt ist.

2.3.7 Abbildungsmatrix für ein zwei-Linsen-System

Analog zum angewendeten Verfahren für die einzelne Linse lässt sich auch mithilfe der Matrizenoptik eine Abbildungsmatrix für ein System bestehend aus zwei Linsen (vgl. Abb. 2.7) erstellen. Dieses ergibt sich ganz analog als Produkt aus drei Translations und zwei Refraktionsmatrizen.

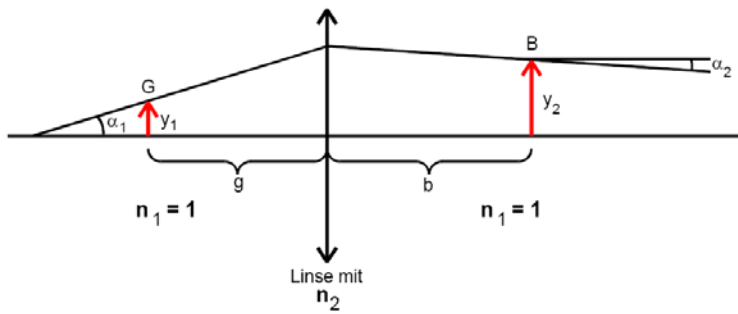


Abbildung 2.6: Strahlengang an einer dünnen Linse

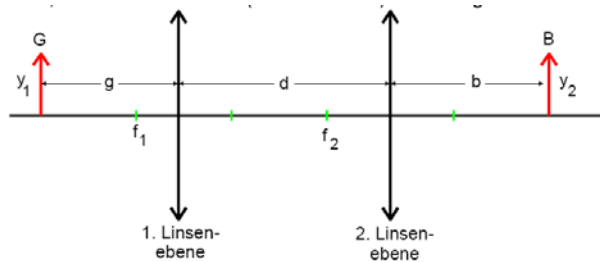


Abbildung 2.7: Strahlengang an einem System aus zwei Linsen

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T}_3 \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Auf eine genaue Aufschlüsselung dieses Produktes sei an dieser Stelle verzichtet. Sie ergibt sich jedoch analog wie eine Linse aus den entsprechenden Multiplikationen der Matrixelemente.

2.3.8 Bildkonstruktion am Zwei-Linsen-System und Begriff der Hauptebenen

Zwar läßt sich theoretisch nun ein Bild konstruieren, da das Verhalten der Strahlen an dem zwei-Linsen-System bekannt ist, jedoch sind die brechenden Ebenen unbekannt. Zu diesem Zweck führt man eine sog. hintere und vordere Brennweite sowie zwei Hauptebenen ein. Diese Hauptebenen werden dann als Refraktionsebenen betrachtet. Ihre Lage charakterisiert den Aufbau (vgl. Abb. 2.8). Das Prinzip der Hauptebenen läßt sich dabei auch auf dicke Linsen übertragen, bei denen ja die genaue Lage der brechenden Ebenen auch nur schlecht experimentell zugänglich ist.

2.3.9 Eigenschaften der Matrixoptik

Über die Werte der einzelnen Matrixelemente lassen sich einige Eigenschaften des Systems direkt bestimmen.

Ist das Element $A = 0$ erhält man eine scharfe Abbildung, da sich alle Strahlen wieder im Brennpunkt vereinigen. In diesem Fall liefert dann das Element B den Vergrößerungsfaktor $-\frac{B}{G}$.

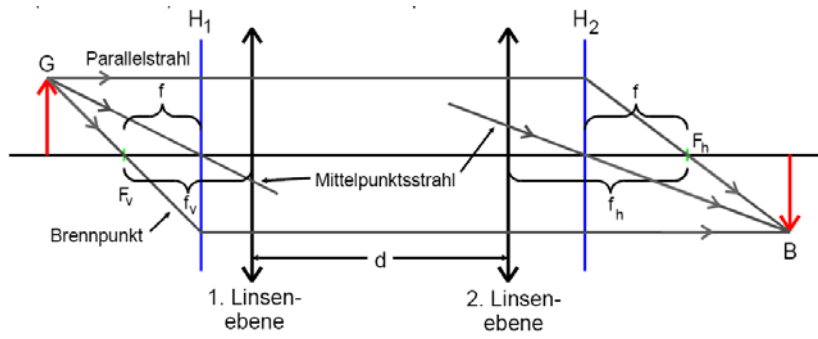


Abbildung 2.8: Darstellung der Hauptebenen bei einem Zwei-Linsen-System

Ist das Element $D = 0$ sind die Winkel α_1 und α_2 unabhängig voneinander und man erhält ein paralleles Strahlenbündel nach der Linse.

Kapitel 3

Experimentelles Vorgehen

3.1 Zielsetzung

Im folgenden soll der Krümmungsradius einer bikonvexen Linse bestimmt werden. Weiterhin wird die Brennweite nach der Besselschen Methode und dem Autokollimationsverfahren bestimmt. Zudem sollen Hauptebenen sowie Brennpunkte eines zwei-Linsen-Systems bestimmt werden.

3.2 Bestimmung des Krümmungsradius r nach der Methode von Kohlrausch

Zur Bestimmung des Krümmungsradius verwenden wir den in Abb. 3.1 wiedergegebenen Aufbau. Man stellt 2 Lichtquellen A und B, die einen Abstand $2c$ von einander haben, in einer Distanz g von der spiegelnden Linsenoberfläche auf. Den Abstand $2d'$ ihrer Spiegelbilder an der sphärischen Oberfläche misst man mit Hilfe eines Massstabes.

Hieraus lässt sich nun entsprechend der Krümmungsradius bestimmen.

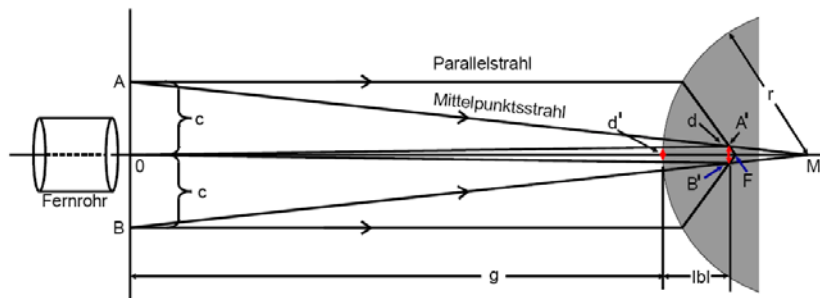


Abbildung 3.1: Bestimmung der Krümmungsradien nach Kohlrausch

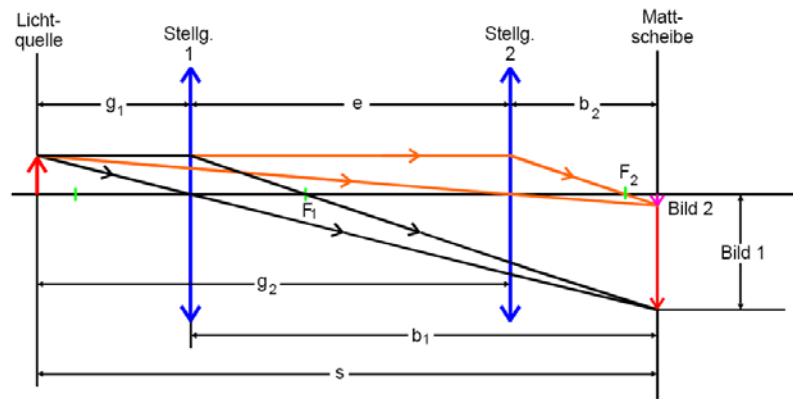


Abbildung 3.2: Bestimmung der Brennweite nach Bessel

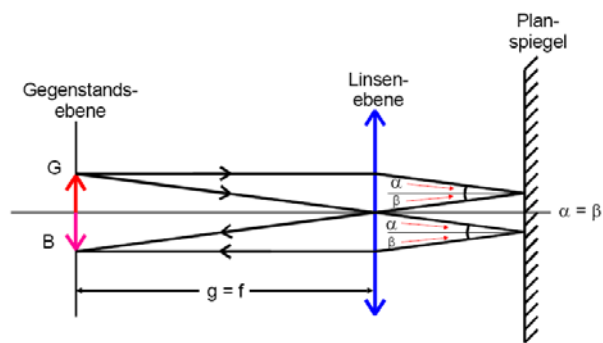


Abbildung 3.3: Bestimmung der Brennweite mit dem Autokollimationsverfahren

3.3 Bestimmung der Brennweite nach dem Verfahren von Bessel

Bei dem Besselschen Verfahren verwenden wir den in Abb. 3.2 dargestellten Aufbau. Man bildet einen Gegenstand auf eine Mattscheibe ab. Man findet dabei jeweils genau zwei Positionen der Linse, für die man eine scharfe Abbildung erhält. Aus der Differenz dieser Abstände lässt sich dann die Brennweite bestimmen.

3.4 Bestimmung der Brennweite nach dem Autokollimationsverfahren

Für das Autokollimationsverfahren verwendet man den in Abb. 3.3 dargestellten Aufbau. Hierbei verwendet man einen Spiegel, der das durch die Linse fallende Licht wieder reflektiert. Wenn man gerade wieder ein scharfes Bild in der Gegenstandsebene erhält ist gerade Gegenstandsweite gleich der Brennweite.

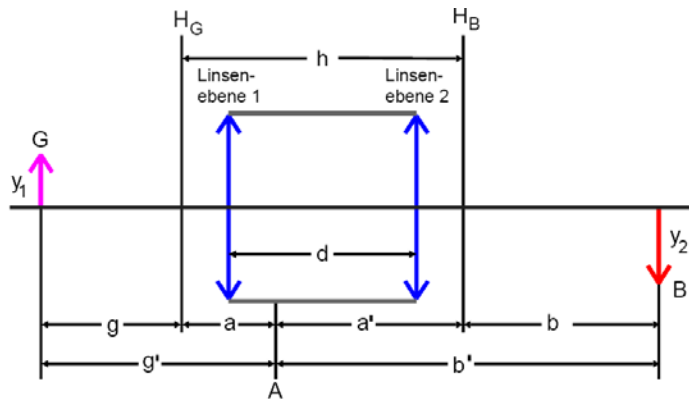


Abbildung 3.4: Bestimmung der Hauptebenen nach Abbe

3.5 Bestimmung der Hauptebenen nach Abbe

Man verwendet den Aufbau aus Abb. 3.4. Zur Bestimmung der Hauptebenen misst man Gegenstands- und Bildweite. Die Distanz zwischen Gegenstandsebene und der Markierung A werde im Falle einer scharfen Abbildung mit g' bezeichnet. Die Distanz zwischen Bildebene und A betrage b' (siehe Abb.19). Gemessen werden muss bei diesem Verfahren auch das Verhältnis v von Bild- und Gegenstandsgröße. Daraus lässt sich dann die Lage der Hauptebenen bestimmen.

Kapitel 4

Auswertung

4.1 Allgemeines zur Fehlerrechnung

Im folgenden werden häufig diese drei Formeln genutzt, um das Protokoll nicht unnötig zu strecken geben wir sie hier einmal an und verweisen in Folge darauf:

Für den Mittelwert gilt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

Für den absoluten Fehler gilt:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Für den relativen Fehler gilt:

$$\sigma_{\bar{x},rel} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}$$

4.2 Bestimmung des Krümmungsradius r nach der Methode von Kohlrausch

Genutzt wurden zwei rote Dioden mit dem Abstand $c = 8,5\text{cm}$ voneinander. Da die gemessene Strecke g hier eine Messung zwischen den Reitern der Linse und der Leuchtdiode auf der Skala darstellt, ziehen wir von diesem Wert noch einmal 2cm der Dicke der Linse und etwa 2cm für die Dicke der Lampe, jeweils vom Reiter aus gemessen.

Der Radius berechnet sich somit nach

$$r = \frac{2(g - 40\text{mm})d'}{c - 2d'} \quad (4.1)$$

g [mm]	d' [mm]	r [cm]		
600	4,5	15,65		
590	4,5	15,37		
550	5,0	15,94		
500	5,5	15,91		
450	6,0	15,57		
400	6,5	14,90		
350	7,5	15,00	Mittelwert	14,55 cm
300	8,5	14,44	Absoluter Fehler	1,04 cm
250	10,0	14,00	Relativfehler	7,12%
200	12,5	13,79		
225	11,5	14,47		
275	9,5	14,78		
190	13,0	13,54		
180	13,5	13,22		
170	14,5	13,37		
160	15,0	12,86		

Tabelle 4.1: Messdaten zur Bestimmung des Krümmungsradius

4.3 Bestimmung der Brennweite mit der Methode nach Bessel

Die Messung zur Brennweite wurde mit monochromatischem Licht, erreicht durch einen Farbfilter, durchgeführt, wodurch mehr Messwerte zustande kommen. Da bei der geometrischen Optik allerdings das Licht als Strahl angenommen wird, bei dem nur Brechung und Reflexion den Strahl beeinflussen, spielt die Wellenlänge und somit die Farbe keine Rolle. Es kann also weiterhin über alle Messwerte gemittelt werden. Die Brennweite berechnet sich nach

$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s} \quad (4.2)$$

Farbe	b_1 [cm]	b_2 [cm]	e [cm]	s [cm]	f [cm]
Rot	131,5	71,5	60,0	97,2	15,04
Rot	127,1	71,3	55,8	93,5	15,05
Rot	119,1	72,1	47,0	86,6	15,27
Rot	110,5	73,0	37,5	78,4	15,12
Rot	106,7	75,0	31,7	70,5	14,06
Rot	95,6	75,3	20,3	66,6	15,10
Rot	85,4	79,2	6,2	60,5	14,97
Rot	91,9	78,1	13,8	63,8	15,20
Rot	99,2	74,7	24,5	69,5	15,22
Rot	108,5	73,2	35,3	77,3	15,29
Rot	116,5	72,5	44,0	83,4	15,05
Rot	120,4	72,4	48,0	87,6	15,32
Rot	125,6	71,8	53,8	92,5	15,30
Rot	129,6	71,9	57,7	95,8	15,26
Rot	135,7	71,4	64,3	101,5	15,19
Grün	136,1	70,8	65,3	101,5	14,87
Grün	132,4	71,1	61,3	98,5	15,09
Grün	128,8	71,4	57,4	95,0	15,08
Grün	125,2	71,8	53,4	91,5	15,08
Grün	120,3	71,8	48,5	87,0	14,99
Grün	114,9	72,3	42,6	82,3	15,06
Grün	109,6	72,8	36,8	77,4	14,98
Grün	103,9	73,6	30,3	72,8	15,05
Grün	98,8	74,6	24,2	68,5	14,99
Grün	95,4	73,3	22,1	68,0	15,20
Grün	88,3	75,0	13,3	63,0	15,05
Grün	83,2	78,4	4,8	60,0	14,90
Grün	98,1	72,0	26,1	70,0	15,07
Grün	102,0	72,5	29,5	72,0	14,98
Grün	103,7	71,5	32,2	75,0	15,29
Blau	131,4	68,9	62,5	100,0	15,23
Blau	126,0	68,9	57,1	95,0	15,17
Blau	120,4	69,4	51,0	90,0	15,28
Blau	114,8	69,9	44,9	85,0	15,32
Blau	109,5	70,3	39,2	80,0	15,20
Blau	103,9	71,3	32,6	75,0	15,21
Blau	97,3	72,4	24,9	70,0	15,29
Blau	90,9	74,8	16,1	65,0	15,25
Blau	81,3	79,4	1,9	60,0	14,98
Blau	118,0	69,9	48,1	88,0	15,43
Blau	136,0	68,6	67,4	105,0	15,43
Blau	123,5	69,3	54,2	93,0	15,35
Blau	106,8	71,1	35,7	77,5	15,26
Blau	93,5	73,7	19,8	67,0	15,29
Blau	111,1	70,6	40,5	82,0	15,50

Rot:	
Mittelwert	15,10 cm
Absoluter Fehler	0,31 cm
Relativfehler	2,04%
Grün:	
Mittelwert	15,05 cm
Absoluter Fehler	0,11 cm
Relativfehler	0,71%
Blau:	
Mittelwert	15,28 cm
Absoluter Fehler	0,12 cm
Relativfehler	0,81%
Gesamt:	
Mittelwert	15,14 cm
Absoluter Fehler	0,22 cm
Relativfehler	1,46%

Tabelle 4.2: Messwerte zur Bessel-Methode

4.4 Bestimmung der Brennweite nach dem Autokollimationsverfahren

Zur Bestimmung der Brennweite wurde die Gleichung

$$f = \frac{g_1 + g_2}{2} \quad (4.3)$$

genutzt, die Messwerte sind in der Tabelle zu finden.

Farbe	g_1 [cm]	g_2 [cm]	f [cm]		
Rot	15,3	16,0	15,65		
Rot	15,2	16,1	15,65		
Rot	15,3	16,1	15,70		
Rot	15,3	16,1	15,70		
Rot	15,5	16,0	15,75		
Rot	15,4	16,0	15,70		
Rot	15,4	16,1	15,75		
Grün	15,8	15,4	15,60		
Grün	15,7	15,3	15,50		
Grün	15,9	15,2	15,55		
Grün	15,9	15,4	15,65		
Grün	15,9	15,3	15,60		
Grün	15,9	15,2	15,55		
Grün	15,0	15,3	15,15		
Blau	15,2	16,0	15,60		
Blau	15,4	16,1	15,75		
Blau	15,4	16,1	15,75		
Blau	15,2	16,0	15,60		
Blau	15,2	15,9	15,55		
Blau	15,4	16,0	15,70		
Blau	15,3	16,1	15,70		
				Rot:	
				Mittelwert	15,7 cm
				Absoluter Fehler	0,04 cm
				Relativfehler	0,26%
				Grün:	
				Mittelwert	15,51 cm
				Absoluter Fehler	0,17 cm
				Relativfehler	1,08%
				Blau:	
				Mittelwert	15,66 cm
				Absoluter Fehler	0,08 cm
				Relativfehler	0,51%
				Gesamt:	
				Mittelwert	15,63 cm
				Absoluter Fehler	0,13 cm
				Relativfehler	0,85%

Tabelle 4.3: Messwerte zum Autokollimationsverfahren

4.5 Berechnung des Brechungsindex des in der Linse verarbeiteten Glases

Zur Bestimmung des Brechungsindex nutzt man die bisher ermittelten Werte, diese sind in der folgenden Tabelle zusätzlich noch einmal zusammengefasst. Für die Brennweiten konnte jeweils ein gemittelter Wert genommen werden, da das Mittel über alle Werte die farbspezifischen Mittel innerhalb der Fehlerwahrscheinlichkeit mit einschließt. Zur Berechnung des Brechungsindex wird die Gleichung

$$n = 1 + \frac{r}{f} \quad (4.4)$$

genutzt, für den Fehler folgt nach Gauss

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sigma_r^2}{f^2} + \sigma_f^2 \frac{r^2}{f^4}} \quad (4.5)$$

Im Vergleich zu Theoriewerten für Glas, welche zwischen 1,5 und 1,9 im Normalfall liegen, sieht

Verfahren	f [cm]	σ_f [cm]	R [cm]	σ_r [cm]	n	σ_n
Bessel	15,14	0,22	14,55	1,04	1,96	0,07
Autokollimation	15,63	0,13	14,55	1,04	1,98	0,07

Tabelle 4.4: Berechnung des Brechungsindex

man, das es hier zu einer nur geringen Abweichung kommt, die im Zuge des Verfahrens nach Bessel sogar noch innerhalb der Fehlerwahrscheinlichkeit liegt, beim Autokollimationsverfahren liegt sie lediglich verschwindend gering außerhalb der Fehlerwahrscheinlichkeit.

4.6 Bestimmung der Hauptebenen nach Abbe

Zur Bestimmung der Hauptebenen wird zunächst b' beziehungsweise g' gegen $1+v$ beziehungsweise $1+\frac{1}{v}$ aufgetragen. In dem Bereich des linearen Kurvenverlaufs wird nun nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine Ausgleichsrechnung durch das Programm "OpenOffice" durchgeführt. Die Ausgleichsrechnung liefert eine Gerade der Art

$$g' = a + f\left(1 + \frac{1}{v}\right) \quad (4.6)$$

und

$$b' = a' + f(1 + v) \quad (4.7)$$

wobei a beziehungsweise a' der Schnittpunkt mit der g' - beziehungsweise b' -Achse und f die Steigung der Ausgleichsgeraden ist. Die Graphen sind im Anschluss an diesen Abschnitt angehängt (Abbildung 4.1 und 4.2) Zur Ermittlung der Theoriewerte wurde die Brennweiten des Systems mit

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad (4.8)$$

$$f_v = \frac{(f_2 - d) f_1}{f_1 + f_2 - d} \quad (4.9)$$

$$f_h = \frac{(f_1 - d) f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad (4.10)$$

wobei d die gemessene Breite des Systems von 8cm ist, ermittelt. Für die gesuchten Werte a und a' ergibt sich nun

$$a = 0,5d + f_v - f \quad (4.11)$$

$$a' = 0,5d + f_h - f \quad (4.12)$$

Aus den gemessenen Werten folgt nun damit für die beiden Linsensysteme:

$b' \pm 1$ [cm]	$g' \pm 1$ [cm]	$B \pm 1$ [cm]	$G \pm 1$ [cm]	v	$v+1$	σ_v	v^{-1}	$v^{-1} + 1$	$\sigma_{v^{-1}}$
62,2	13,3	14,0	2,9	4,83	5,83	0,17	0,21	1,21	0,01
60,0	13,3	13,5	2,9	4,66	5,66	0,16	0,21	1,21	0,01
55,0	13,4	12,2	2,9	4,21	5,21	0,15	0,24	1,24	0,01
50,0	13,7	11,1	2,9	3,83	4,83	0,14	0,26	1,26	0,01
45,0	14,2	9,6	2,9	3,31	4,31	0,12	0,30	1,30	0,01
40,0	14,8	8,4	2,9	2,90	3,90	0,11	0,35	1,35	0,01
35,0	15,4	7,0	2,9	2,41	3,41	0,09	0,41	1,41	0,02
30,0	16,7	5,6	2,9	1,93	2,93	0,07	0,52	1,52	0,02
25,0	18,1	4,4	2,9	1,52	2,52	0,06	0,66	1,66	0,03
20,0	21,3	3,0	2,9	1,03	2,03	0,05	0,97	1,97	0,05

b' gegen a'	
f [cm]	$11,07 \pm 0,09$
a' [cm]	$-2,77 \pm 0,38$

g' gegen a	
f [cm]	$11,74 \pm 0,14$
a [cm]	$0,24 \pm 0,19$

Tabelle 4.5: Messwerte zum 1. Linsensystem

Bezeichnung	Wert [cm]
f	11,11
f_h	5,19
f_v	6,67
a'	-1,93
a	-0,44

Tabelle 4.6: Theoriewerte zum 1. Linsensystem

4.6.1 1. Linsensystem

$f_1 = 200\text{mm}$, $f_2 = 150\text{mm}$

4.6.2 2. Linsensystem

$f_1 = 150\text{mm}$, $f_2 = 200\text{mm}$

$b' \pm 1$ [cm]	$g' \pm 1$ [cm]	$B \pm 1$ [cm]	$G \pm 1$ [cm]	v	v+1	σ_v	v^{-1}	$v^{-1} + 1$	$\sigma_{v^{-1}}$
60,0	11,3	12,9	2,9	4,45	5,45	0,16	0,22	1,22	0,01
55,0	11,5	11,6	2,9	4,00	5,00	0,14	0,25	1,25	0,01
50,0	11,9	10,4	2,9	3,59	4,59	0,13	0,28	1,28	0,01
45,0	12,3	9,1	2,9	3,14	4,14	0,11	0,32	1,32	0,01
40,0	13,0	7,7	2,9	2,66	3,66	0,10	0,38	1,38	0,01
35,0	13,9	6,3	2,9	2,17	3,17	0,08	0,46	1,46	0,02
30,0	15,4	5,1	2,9	1,76	2,76	0,07	0,57	1,57	0,02
25,0	17,1	3,8	2,9	1,31	2,31	0,06	0,76	1,76	0,03
20,0	21,8	2,4	2,9	0,83	1,83	0,04	1,21	2,21	0,07
15,0	37,0	1,2	2,9	0,41	1,41	0,04	2,42	3,42	0,22

b' gegen a'	
f [cm]	$11,07 \pm 0,06$
a' [cm]	$-0,48 \pm 0,22$

g' gegen a	
f [cm]	$11,62 \pm 0,17$
a [cm]	$-3,08 \pm 0,31$

Tabelle 4.7: Messwerte zum 2. Linsensystem

Bezeichnung	Wert [cm]
f	11,11
f_h	6,67
f_v	5,19
a'	-0,44
a	-1,93

Tabelle 4.8: Theoriewerte zum 2. Linsensystem

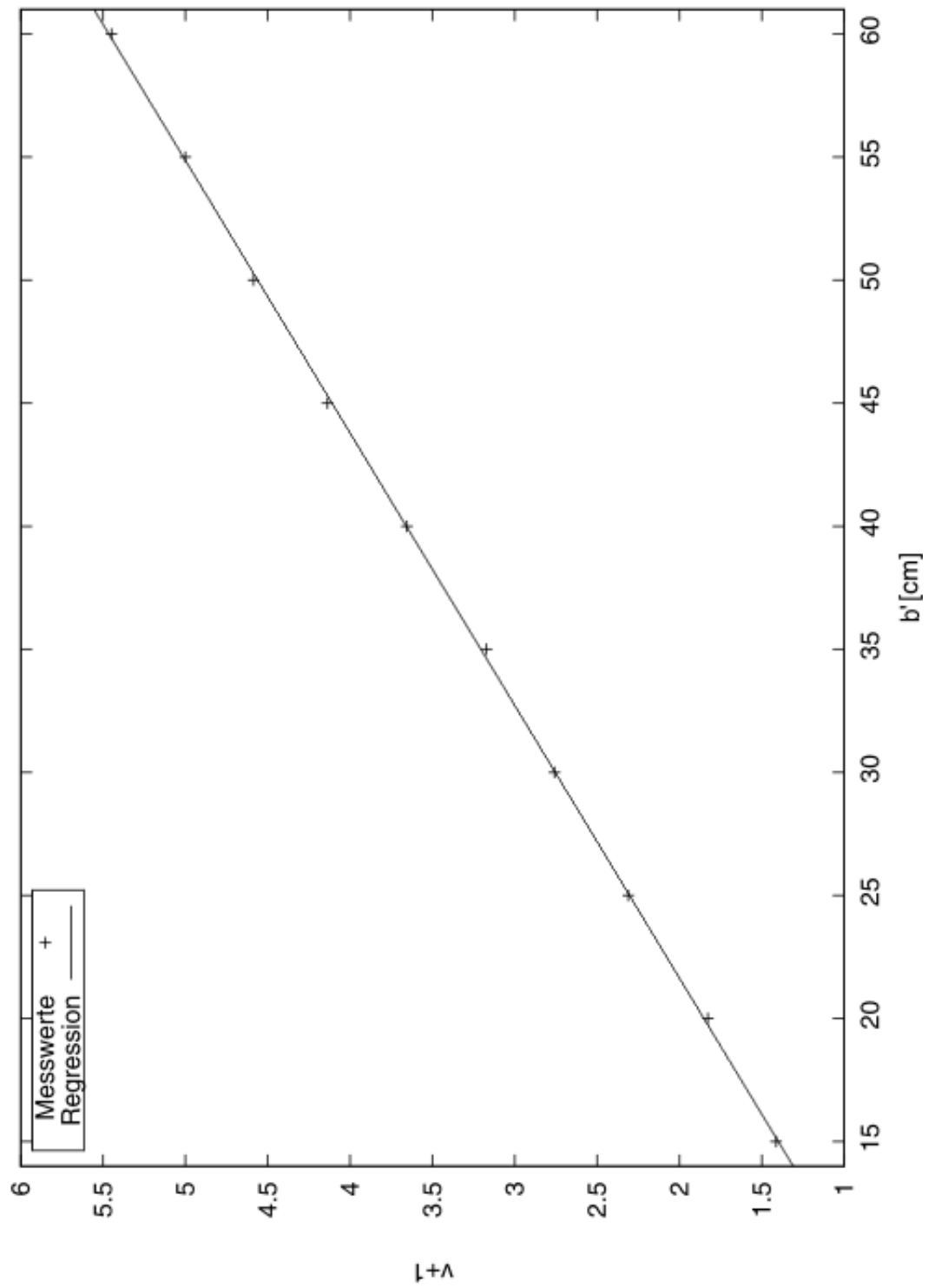


Abbildung 4.1: Regression zum 2. Linsensystem

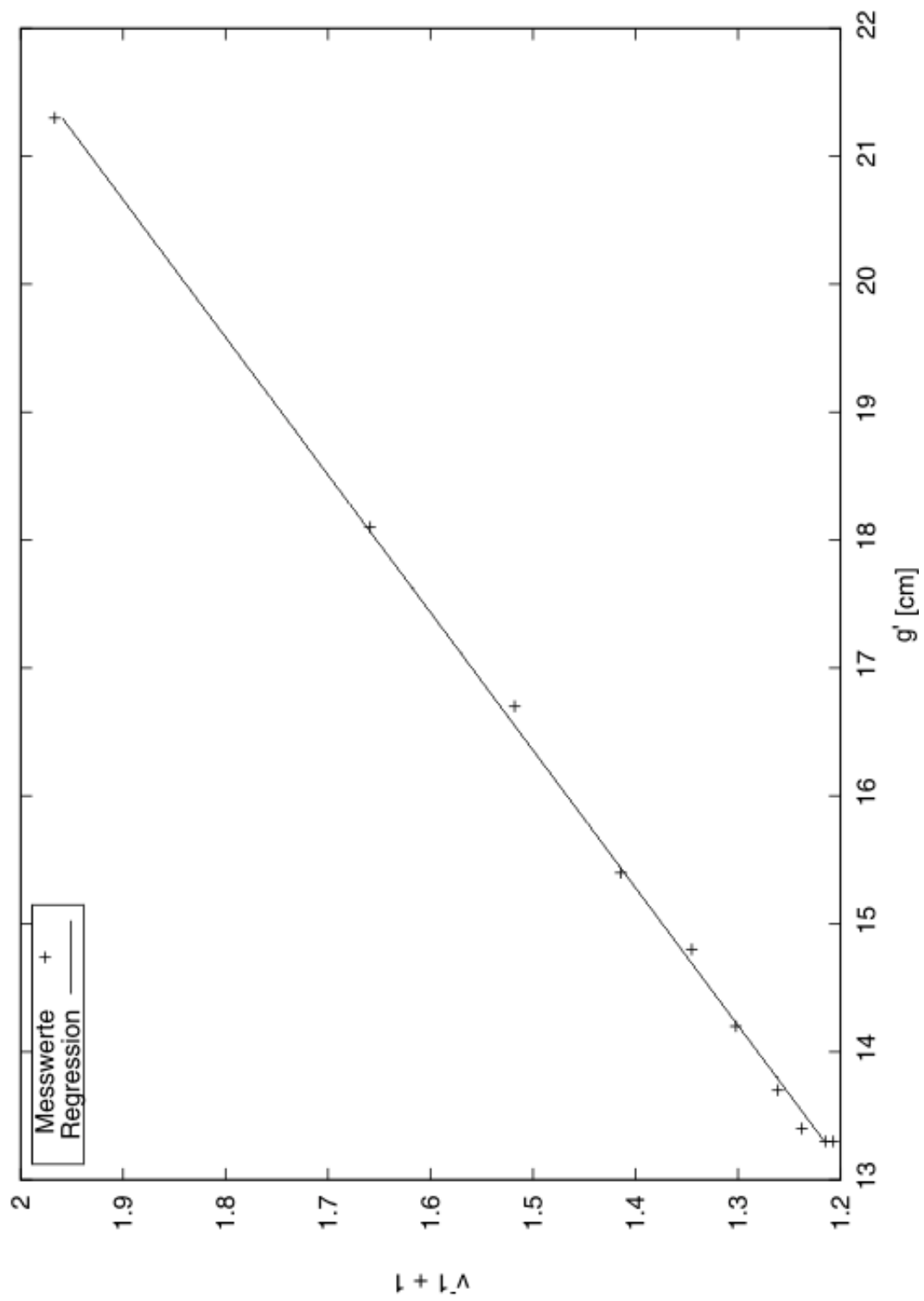


Abbildung 4.2: Regression zum 1. Linsensystem

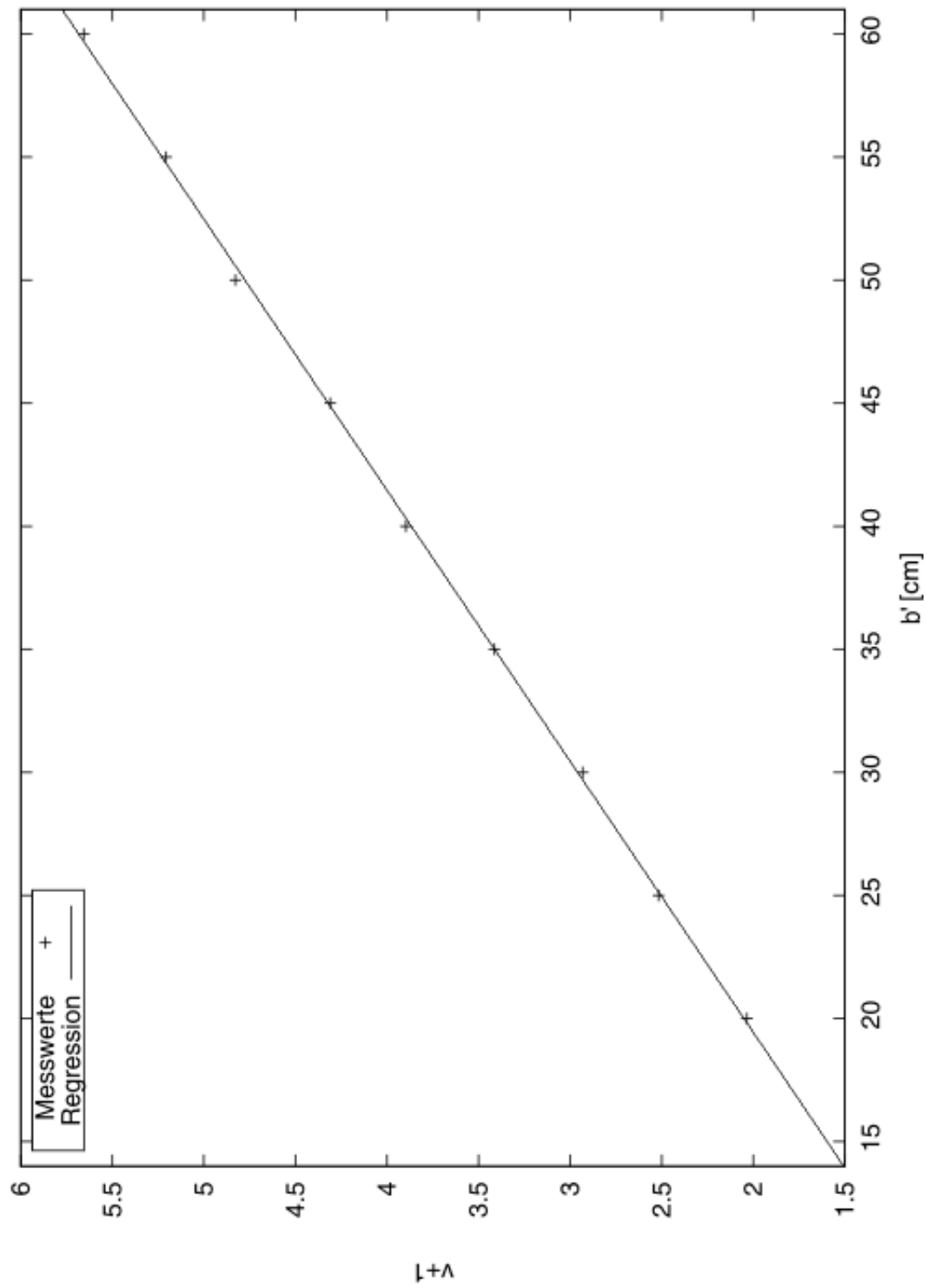


Abbildung 4.3: Regression zum 1. Linsensystem

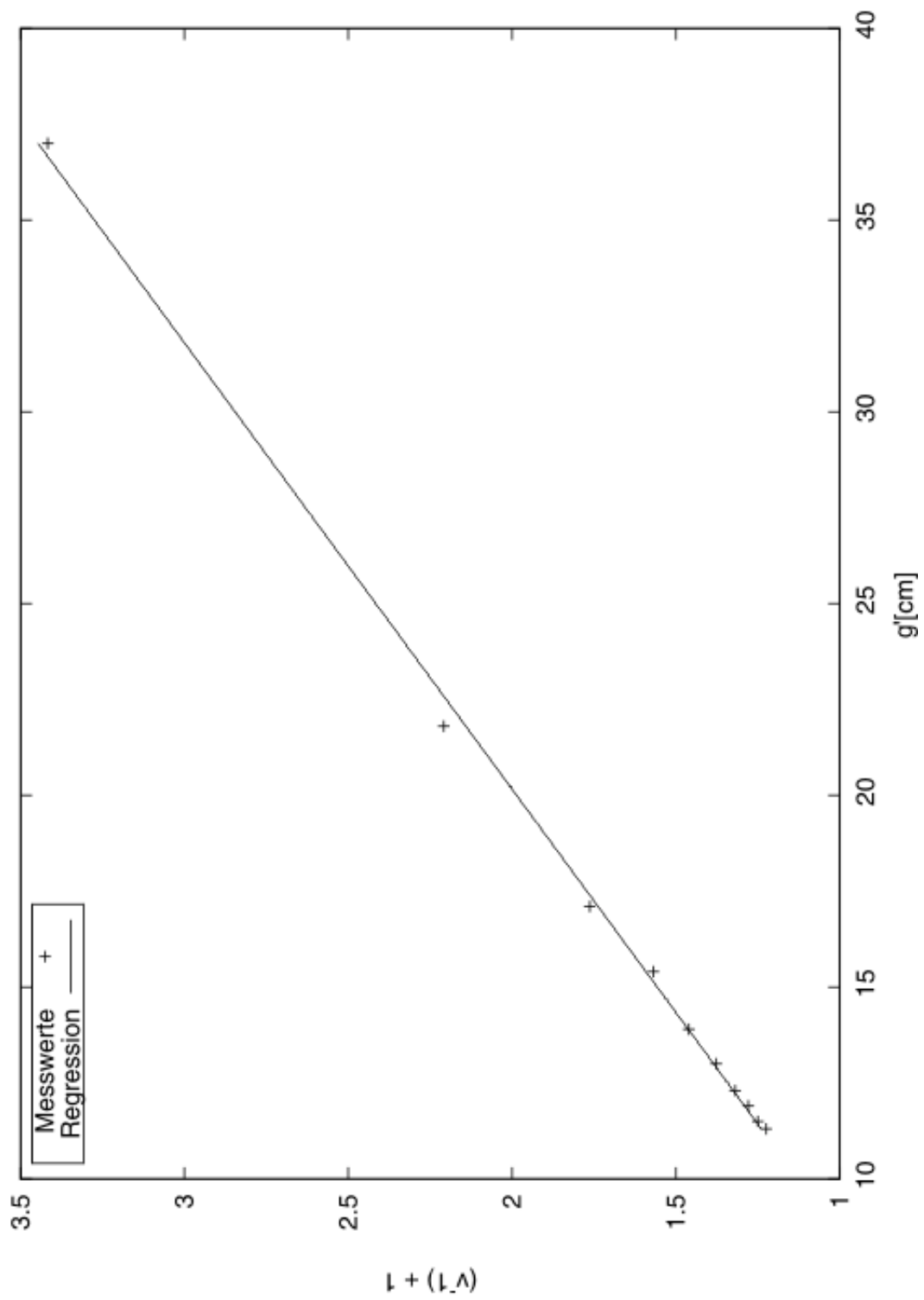


Abbildung 4.4: Regression zum 2. Linsensystem